Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Дайняк Александр Борисович

Оценки числа независимых множеств в графах из некоторых классов

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сапоженко Александр Антонович

Москва — 2009

Оглавление

Введение

Важную роль в комбинаторике с момента её возникновения играют перечислительные задачи, связанные с подсчётом числа объектов, обладающих заданными свойствами. Примерами задач такого рода являются проблемы оценки количества целочисленных решений системы линейных неравенств, числа изомеров химических соединений, количества графов с теми или иными свойствами. Другим важным классом комбинаторных задач являются экстремальные задачи, связанные с описанием структуры объектов из заданного класса, максимизирующих или минимизирующих некоторый параметр. В качестве примера можно привести знаменитую теорему Турана о наибольшем числе рёбер в графе, не содержащем клик заданного размера. В диссертации решаются задачи, лежащие на стыке двух указанных областей комбинаторики. Доказываются верхние и нижние оценки числа независимых множеств (то есть подмножеств попарно не смежных вершин) в графах из различных классов, и описывается структура графов, на которых достигаются полученные оценки.

История вопроса

Задача перечисления независимых множеств в графах рассматривается с середины прошлого века и успела стать одним из классических разделов теории графов. Эта задача находит приложения не только непосредственно в математике (комбинаторная теория чисел [17, 21], теория кодирования [14], теоретическая информатика [26]), но и в других областях. Так, например, в теоретической химии параметр $i(G)$, равный числу независимых множеств графа G, называется индексом Мэррифилда–Симмонса [34], а параметр $i'(G)$, равный числу независимых множеств в рёберном графе графа G, упоминается как индекс Хосойи [29]. Ниже приводится краткий обзор работ по перечислению независимых множеств.

Используемая далее терминология в целом согласуется с книгой [13]. Далее рассматриваются только простые неориентированные графы. Подмножество попарно не смежных вершин графа называется *независимым*. Под *максимальными независимыми множествами* (м. н. м.) будем понимать максимальные по включению независимые множества. Максимальный размер независимого множества в графе называется *числом независимости* графа. Будем обозначать через $\alpha(G)$ число независимости графа G, а через $n(G)$ — число вершин в G. Через $i(G)$ и $i_M(G)$ будем обозначать число независимых множеств и число м. н. м. в G соответственно. Запись $G' \simeq G''$ означает, что графы G' и G'' изоморфны.

Одними из первых работ в области перечисления независимых множеств являются статьи [35] и [36], в которых независимо был доказан следующий факт.

***Теорема* 1** (Р. Е. Миллер, Д. Е. Маллер [35] и Дж. У. Мун, Л. Мозер [36])**.** *Пусть G — граф на n вершинах, имеющий максимальное число м. н. м. среди всех n–вершинных графов. Тогда G является*

объединением $n/3$ копий графа K_3 при $n \equiv 0 \pmod 3$,

объединением графа K_2 и $(n-2)/3$ копий K_3 при $n \equiv 2 \pmod 3$,

объединением $(n-4)/3$ копий графа K_3 и либо графа K_4, либо двух графов K_2 при $n \equiv 1 \pmod 3$.

Экстремальные графы в теореме 1 являются частным случаем графов $UK_{n,\alpha}$, определяемых следующим образом: $UK_{n,\alpha}$ суть объединение $(\alpha \cdot (\lfloor n/\alpha \rfloor + 1) - n)$ клик размера $\lfloor n/\alpha \rfloor$ и $(n - \alpha \cdot \lfloor n/\alpha \rfloor)$ клик размера $\lceil n/\alpha \rceil$. Можно проверить, что $n(UK_{n,\alpha}) = n$, $\alpha(UK_{n,\alpha}) = \alpha$.

Теорема 1 обобщалась в различных направлениях несколькими авторами. Так, например, К. Кройтору [25] рассматривал задачу оценки сверху числа м. н. м. в классе всех графов с заданным числом независимости. Дж. М. Нильсен [37] получила достижимую верхнюю оценку числа м. н. м. заданного размера в графах. В обеих указанных задачах максимум достигается на графе $UK_{n,\alpha}$. Подобные оценки используются для получения оценок времени работы алгоритмов раскраски графов и определения мощности максимального независимого множества (см., например, [26, 37]). Это обеспечивается существованием алгоритмов, перебирающих все м. н. м. в графе за время, пропорциональное количеству м. н. м., умноженному на полином от числа вершин графа [31, 43].

Интерес представляет также получение оценок числа м. н. м. в классах графов, описанных в терминах запрещённых подграфов. М. Гуйтером и Ж. Тузой [30] была получена оценка числа м. н. м. в графах без треугольников (то есть в графах, не содержащих K_3 в качестве подграфа). В работе В. Е. Алексеева [1] исследовалось число м. н. м. в графах, не содержащих «большого» паросочетания (объединения графов K_2) в качестве порождённого подграфа.

Большое внимание уделяется получению оценок числа независимых множеств в графах с небольшим числом циклов, в первую очередь, деревьев. В работе [40] Г. Продингера и Р. Ф. Тичи были получены верхние и нижние оценки числа независимых множеств в деревьях с заданным числом вершин. Через ϕ_n обозначим $(n+2)$-ое число Фибоначчи ($\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} + \phi_{n-2}$ при $n \geqslant 2$).

***Теорема* 2** (Г. Продингер, Р. Тичи [40]). *Пусть T — дерево на n вершинах. Тогда $\phi_n \leqslant i(T) \leqslant 2^{n-1}+1$, причём равенство $i(T)=\phi_n$ имеет место только в случае, если T является простой цепью, а равенство $i(T)=2^{n-1}+1$ лишь в случае когда T — звезда.*

В той же статье было найдено число независимых множеств в цикле на n вершинах. По-видимому, со статьи Продингера и Тичи берёт начало использование термина «число Фибоначчи графа» в качестве синонима для числа независимых множеств. В работе С. Лин и Ч. Лин [33] были охарактеризованы деревья, число независимых множеств в которых отличается не более чем на 7 от максимально возможного $2^{n-1}+1$.

В статье Г. С. Вильфа [44] была получена верхняя оценка числа максимальных независимых множеств в деревьях с заданным числом вершин:

***Теорема* 3** (Г. С. Вильф [44]). *Для любого дерева T на n вершинах выполнены неравенства $i_M(T) \leqslant 2^{(n-1)/2}$ при нечётных n, и $i_M(T) \leqslant 1+2^{(n-2)/2}$ при чётных n.*

Оригинальное доказательство теоремы 3 основывалось на свойствах разбиений натуральных чисел. Б. Е. Саган в работе [41], используя теоретико–графовые рассуждения, упростил доказательство теоремы 3 и полностью охарактеризовал деревья, на которых достигается верхняя оценка. В статье [44] был поставлен вопрос о числе м. н. м. в связных графах с заданным числом вершин. Ответ на него был получен в [28]. В работе [42] теоремы Вильфа и Муна–Мозера одновременно обобщались за счёт рассмотрения класса связных графов с заданным числом циклов. Для каждых фиксированных n и r в [42] были указаны графы, на которых достигается максимум числа м. н. м. в классе всех связных n–вершинных графов с r циклами.

Для дальнейшего изложения введём несколько определений. Пусть $U=\{u_1,\ldots,u_{d-1}\}$, $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$, $W=\{w_1,\ldots,w_q\}$. Обозначим через $B_{d,p,q}$ дерево на множестве вершин $U\cup V\cup W$, такое, что его поддеревья, порождённые множествами $\{u_1\}\cup V$, $\{u_{d-1}\}\cup W$ и U представляют собой соответственно звёзды $K_{1,p}$, $K_{1,q}$ и цепь P_{d-1}. Отметим, что $B_{d,1,1}$ есть просто цепь длины d. П. Д. Вестергардом и А. С. Педерсеном была получена следующая верхняя оценка числа независимых множеств в деревьях заданного диаметра:

Теорема (П. Д. Вестергард, А. С. Педерсен [39]). *Для любого n–вершинного дерева T диаметра d выполнено неравенство $i(T) \leqslant i(B_{d,n-d,1})$, обращающееся в равенство только при $T \simeq B_{d,n-d,1}$.*

В той же работе [39] был поставлен вопрос о нижних оценках числа независимых множеств в деревьях заданного диаметра. Для деревьев диаметра 4 исчерпывающий ответ был дан в работе [27] (формулировка теоремы приведена в разд. 1.1). Также в работе [27] была описана структура экстремальных деревьев диаметра 5 для достаточно больших n. Проблема Вестергарда (полное описание экстремальных деревьев при произвольном заданном числе вершин и диаметре) до сих пор не решена в общем случае.

Важным направлением является получение асимптотических оценок числа независимых множеств в параметрических классах графов. К таковым относятся диаграммы Хассе частично упорядоченных множеств, плоские прямоугольные решётки и др. В работе [14] А. Д. Коршуновым и А. А. Сапоженко была получена асимптотика числа независимых множеств в графе n–мерного булева куба (в оригинале результат сформулирован в терминах числа двоичных кодов с расстоянием 2).

Теорема (А. Д. Коршунов, А. А. Сапоженко [14])***.*** *Для графа n–мерного булева куба B^n справедлива асимптотика*

$$i(B^n) \sim 2\sqrt{e}2^{2^{n-1}}.$$

Для числа независимых множеств в полных бинарных деревьев с n ярусами рёбер В. П. Ворониным и Е. В. Демаковой получен следующий результат.

Теорема* 4** (В. П. Воронин, Е. В. Демакова [2]).*** *Обозначим через ι_n число независимых множеств в полном бинарном дереве, имеющем k ярусов рёбер. Существуют константы β и γ такие, что при $n \to \infty$ справедлива асимптотика*

$$\iota_n \sim \beta \cdot \gamma^{2^n}.$$

Активно также исследовался вопрос асимптотики числа независимых множеств в плоских прямоугольных решётках — графах $\Gamma_{m,n}$, определяемых соотношениями $V(\Gamma_{m,n}) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ и

$$E(\Gamma_{m,n}) = \{\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1\}.$$

Из многих работ на эту тему упомянем статью Г. С. Вильфа и Н. Калкина [23], характерную применением метода трансфер-матриц, в которой доказана следующая

Теорема (Г. С. Вильф, Н. Калкин [23])***.*** *Существует двойной предел при $m, n \to \infty$*

$$i(\Gamma_{m,n})^{\frac{1}{mn}} \to \eta,$$

где $1.503 < \eta < 1.5035$.

Значительный интерес представляют оценки числа независимых множеств в регулярных и «почти регулярных» графах (то есть графах, в которых степени вершин либо попарно равны, либо лежат в сравнительно узком диапазоне). К задачам такого рода сводятся некоторые перечислительные проблемы теории чисел и теории групп. Например, перечисление множеств, свободных от сумм (МСС), в абелевых группах (то есть множеств A, таких, что $A \cap \{a+b \mid a,b \in A\} = \varnothing$) сводится к перечислению независимых множеств в графах Кэли. Этот подход был применён Н. Алоном в [21] для получения асимптотики логарифма числа МСС в отрезке натуральных чисел. Позже, также с применением теории графов, А. А. Сапоженко [17] получил асимптотику числа МСС в отрезке натуральных чисел. Рабочим инструментом в статье [21] была следующая оценка для числа независимых множеств в регулярных графах.

Теорема (Н. Алон [21])**.** *Для любого k–регулярного графа G на n вершинах число независимых множеств $i(G)$ удовлетворяет неравенству*

$$i(G) \leqslant 2^{\frac{n}{2}(1+f(k))}, \tag{1}$$

где $f(k) = O(k^{-0.1})$.

В доказательстве приведённой теоремы подсчёт числа независимых множеств в регулярных графах был сведён к подсчёту числа независимых множеств в почти регулярных двудольных графах. Такую возможность обеспечивала следующая лемма.

***Лемма* 1** (Н. Алон [21])**.** *Для всякого k–регулярного n–вершинного графа существует остовный двудольный подграф, степени вершин которого лежат в интервале*

$$\left[k/2 - 2\sqrt{k\log_2 k},\ k/2 + 2\sqrt{k\log_2 k}\right].$$

Отметим, что задача оценки числа независимых множеств в двудольных графах возникает и при других обстоятельствах, например, при решении проблемы Дедекинда [19].

А. А. Сапоженко предложил более простое доказательство оценки (1), улучшив, кроме того, остаточный член до $f(k) = O(\sqrt{k^{-1}\ln k})$ и распространив оценку на квазирегулярные графы [16].

В работе [21] высказано следующее

Предположение (Н. Алон [21])**.** *Наибольшим числом независимых множеств среди k–регулярных графов на n вершинах при $2k \mid n$ обладает единственный с точно-*

стью до изоморфизма граф, представляющий собой объединение $\frac{n}{2k}$ непересекающихся полных двудольных графов.

Граф из формулировки гипотезы будем называть далее *графом Алона*.

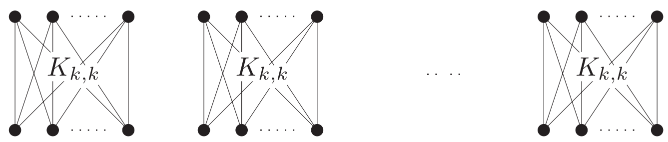

Рис. 1. Граф Алона

Эта гипотеза остается недоказанной до сих пор (апрель 2009), хотя большинство исследователей не сомневаются в ее справедливости. Справедливость этой гипотезы означала бы в частности, что в (1) имеет место оценка $f(k) = O(k^{-1})$.

С помощью теоретико–информационного подхода Дж. Каном и А. Лоренцем в статье [32] была получена достижимая верхняя оценка числа независимых множеств в двудольных регулярных графах, что косвенно подтверждает гипотезу Алона.

***Теорема* 5** (Дж. Кан, А. Лоренц [32])**.** *Пусть G — двудольный k–регулярный граф на n вершинах. Тогда*

$$i(G) \leqslant (2^{k+1} - 1)^{\frac{n}{k}}.$$

Отметим, что вопрос о единственности экстремального графа в теореме 5 до сих пор остаётся открытым.

Интересен вопрос о числе независимых множеств в графах, для которых известен размер наибольшего независимого множества. Это связано с довольно общим подходом в перечислительной комбинаторике, который может быть назван *методом контейнеров* [20]. Метод состоит в следующем. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — семейства подмножеств некоторого множества. Скажем, что семейство $\mathcal{B}$ является *системой контейнеров* для $\mathcal{A}$, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ найдётся $B \in \mathcal{B}$, такое, что $A \subseteq B$. Тогда, очевидно, выполнено неравенство

$$|\mathcal{A}| \leqslant \sum_{B \in \mathcal{B}} 2^{|B|}.$$

Грубые на первый взгляд, такие оценки при подходящем выборе системы $\mathcal{B}$ позволяют получать асимптотику. Таким способом, например, А. А. Сапоженко получил решение проблемы Камерона–Эрдёша [17]. Вопрос о применимости метода контейнеров для задачи оценки числа независимых множеств в графах тесно связан с указанной выше задачей перечисления независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости, поскольку семейство всех м. н. м. графа является системой контейнеров для семейства всех независимых множеств, и число независимости графа является прямым ограничением размера таких контейнеров.

В статье [1] была доказана следующая

***Теорема* 6** (В. Е. Алексеев [1])**.** *Для любого графа G выполнено неравенство*

$$i(G) \leqslant \left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^{\alpha}, \tag{2}$$

где $n = n(G)$, $\alpha = \alpha(G)$.

Неравенство (2) было использовано в [1] для оценки числа м. н. м. в графах, а в работе [18] — для получения верхних оценок числа независимых множеств в квазирегулярных графах с ограничением на число независимости и расширителях. Достижимая нижняя оценка числа независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости получена в [38].

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из трёх глав.

Первая глава посвящена оценкам числа независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра. В разделе 1.1 вводится ключевое понятие *ёмкости* графа и даётся несколько других определений, доказываются вспомогательные утверждения. В разделе 1.2 доказываются нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра $6, 7, 8, 9$. В частности, доказываются следующие теоремы:

Теорема (разд. 1.2, теоремы 8, 9)**.** *Любое дерево диаметра 6 на n вершинах содержит не меньше $35^{(n-1)/7}$ независимых множеств. Любое дерево диаметра 7 на n вершинах содержит не меньше $35^{(n-2)/7}$ независимых множеств. Любое дерево диаметра 8 на n вершинах содержит не меньше $35122^{(n-1)/21}$ независимых множеств. Любое дерево диаметра 9 на n вершинах содержит не меньше $35122^{(n-2)/21}$ независимых множеств.*

В разделе 1.3 доказываются теоремы, характеризующие структуру экстремальных деревьев в проблеме Вестергарда. Дерево T называется (n, d)–минимальным, если оно имеет наименьшее число независимых множеств среди всех деревьев диаметра d на n вершинах. Через F_T будем обозначать лес, полученный из дерева T удалением всех центральных вершин.

Теорема (разд. 1.3, теорема 10)**.** *Для произвольного фиксированного d существует конечное множество деревьев $\mathcal{M}_d$ со следующим свойством. Для любого n и* *любого (n, d)–минимального дерева T каждая из компонент леса F_T изоморфна некоторому дереву из $\mathcal{M}_d$.*

Через T' обозначим такое дерево, что лес $F_{T'}$ является паросочетанием на шести вершинах. Пусть T'' означает дерево диаметра 6, такое, что лес $F_{T''}$ является объединением четырёх пятивершинных цепей.

Теорема (разд. 1.3, следствие из теоремы 12)***.*** *При $d \in \{6, 7\}$ и при всех достаточно больших n вида $7k + d - 5$, $k \in \mathbb{N}$, для любого (n, d)–минимального дерева T все компоненты леса F_T изоморфны дереву T'. При $d \in \{8, 9\}$ и при всех достаточно больших n вида $21k + d - 7$, $k \in \mathbb{N}$, для любого (n, d)–минимального дерева T все компоненты леса F_T изоморфны дереву T''.*

В разделе 1.4 приводятся оценки числа независимых множеств в так называемых радиально регулярных деревьях, предположительно являющихся деревьями минимальной ёмкости.

В разделе 1.5 получено обобщение теоремы Воронина–Демаковой на случай q–арных деревьев при произвольном q. Обозначим через $\iota_{q,k}$ число независимых множеств в полном q–арном дереве, имеющем k ярусов рёбер, или, что то же, диаметр $2k$. Доказана следующая

Теорема (разд. 1.5, теорема 15)***.*** *При $q \in \{2, 3, 4\}$ для $\iota_{q,k}$ справедлива асимптотика при $k \to \infty$:*

$$\iota_{q,k} \sim \beta_q \cdot \gamma_q^{q^k},$$

для некоторых констант β_q и γ_q.

При $q \geqslant 5$ справедлива асимптотика при $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} \iota_{q,2k} &\sim \alpha_{q,0} \cdot \gamma_q^{q^{2k}}, \\ \iota_{q,2k+1} &\sim \alpha_{q,1} \cdot \gamma_q^{q^{2k+1}}, \end{aligned}$$

где константы $\alpha_{q,0}$ и $\alpha_{q,1}$ удовлетворяют неравенству $\alpha_{q,0} > \alpha_{q,1}$.

Заслуживает внимания различный характер асимптотики величины $\iota_{q,k}$ при $q \leqslant 4$ и $q \geqslant 5$.

Результаты первой главы опубликованы в [4, 8].

Вторая глава диссертации посвящена оценкам числа максимальных независимых множеств в графах заданного диаметра. В разделе 2.1 вводятся основные определения и доказываются некоторые вспомогательные утверждения. В разделе 2.2

получено полное описание графов с заданным диаметром, на которых достигается минимум числа м. н. м. Определим последовательность ψ_n соотношением $\psi_n = \psi_{n-2} + \psi_n$ и начальными условиями $\psi_0 = \psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$.

Теорема (разд. 2.2, теорема 16)***.*** *Для любого d, $d \geqslant 4$, и для любого графа G диаметра d выполнено неравенство $i_M(G) \geqslant \psi_{d+1}$. Если $i_M(G) = \psi_{d+1}$, то множество $V(G)$ можно разбить на подмножества $V_0, \ldots, V_d$, так, что при любом k, $2 \leqslant k \leqslant d$, и любом i, $0 \leqslant i \leqslant d-k$, в G отсутствуют рёбра между вершинами из V_i и V_{i+k}, и для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, подграф графа G, порождённый множеством $V_i \cup V_{i+1}$, является полным двудольным с долями V_i и V_{i+1}.*

В разделе 2.3 приводится полное описание деревьев с заданным диаметром и числом вершин, на которых достигается максимум числа м. н. м. Тем самым получено существенное обобщение теорем Вильфа [44] и Сагана [41]:

Теорема (разд. 2.3, теорема 17)***.*** *Для любого n–вершинного дерева T диаметра d выполнено неравенство $i_M(T) \leqslant M(n,d)$, где*

$$M(n,d) = \begin{cases} \psi_{d-1} + (2^{(n-d+1)/2} - 1)\psi_{d-2}, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2k+1,\ k \geqslant 0, \\ \psi_{d-2} + \psi_d, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1}, & \text{при } d \geqslant 5,\ d \neq 7,\ n-d = 2k \geqslant 4, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} + 1, & \text{при } d \in \{4,7\},\ n-d = 2k \geqslant 4. \end{cases}$$

При $d \geqslant 9$ существует единственное с точностью до изоморфизма дерево, на котором достигается указанная оценка (полное описание экстремальных деревьев при всех d см. в разд. 2.3).

Результаты второй главы опубликованы в [9, 10, 11, 12].

В третьей главе диссертации исследуется число независимых множеств в графах с заданным размером максимального независимого множества. Неравенство (2) обращается в равенство при $\alpha | n$ (максимум числа независимых множеств достигается на графе $UK_{n,\alpha}$). Доказываемая в разделе 3.1 теорема 18 даёт уточнение оценки (2), делающее её достижимой при всех возможных сочетаниях параметров n, α, а также описывает экстремальные графы.

Теорема (разд. 3.1, теорема 18)***.*** *Для любого графа G, такого, что $n(G) = n$ и $\alpha(G) = \alpha$, выполнено неравенство $i(G) \leqslant i(UK_{n,\alpha})$, обращающееся в равенство только на графах, изоморфных $UK_{n,\alpha}$.*

В разделе 3.2 получены оценки числа независимых множеств в деревьях и лесах с заданным числом независимости.

Теорема (разд. 3.2, теорема 19)***.*** *Для любых n, α $(n \geqslant 2)$ среди всех деревьев на n вершинах с числом независимости α максимальное число независимых множеств имеют только деревья, изоморфные дереву, полученному из звезды $K_{1,\alpha}$ подразбиением $(n-\alpha-1)$ рёбер.*

Теорема (разд. 3.2, теорема 20)***.*** *Среди всех лесов на n вершинах без изолированных вершин с числом независимости α максимум числа независимых множеств достигается только на лесах, являющихся объединением паросочетания на $2(n-\alpha-1)$ вершинах и звезды $K_{1,2\alpha-n+1}$.*

Раздел 3.3 посвящён оценкам числа независимых множеств в регулярных n–вершинных графах, число независимости в которых близко́ к $n/2$ (то есть к максимально возможному).

Теорема (разд. 3.3, теорема 22)***.*** *Для сколь угодно больших K и N существует k–регулярный n–вершинный граф G, такой, что $k > K$, $n > N$, и*

$$\begin{aligned} \alpha(G) &< \frac{n}{2}\left(1-\Omega(k^{-1})\right), \\ \log_2(i(G)) &> \frac{n}{2}\left(1+\Omega(k^{-1})\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для любой константы $\theta \in (0, 1/2)$ для любого k–регулярного n–вершинного графа G, такого, что $\alpha(G) < \frac{n}{2}(1-\Omega(k^{-\theta}))$, выполнено неравенство

$$\log_2(i(G)) < \frac{n}{2}(1-\Omega(k^{-\theta})).$$

В разделе 3.4 доказывается обобщение теоремы 5 на квазирегулярные двудольные графы:

Теорема (разд. 3.4, теорема 23)***.*** *Пусть G — двудольный граф с долями A и B. Пусть степени вершин из A ограничены сверху числом k_2, а степени вершин из B ограничены снизу числом k_1. Тогда*

$$i(G) \leqslant (2^{k_1}+2^{k_2}-1)^{\frac{|A|}{k_1}}.$$

Результаты третьей главы опубликованы в [3, 5, 6, 7].

Основные результаты диссертации

1. Для произвольного d описана структура (n, d)–минимальных деревьев (теоремы 10, 11, 12). Как следствие, получены асимптотически достижимые нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра $6, 7, 8, 9$ (теоремы 8, 9, 13).

2. Получена достижимая нижняя оценка числа максимальных независимых множеств в графах фиксированного диаметра, приведено полное описание экстремальных графов (теорема 16). Получена достижимая верхняя оценка числа максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра, приведено полное описание экстремальных деревьев (теорема 17).

3. Получена достижимая верхняя оценка числа независимых множеств в графах с заданным числом независимости, полностью описаны графы, на которых эта оценка достигается (теорема 18).

4. Получены оценки числа независимых множеств в регулярных графах с числом независимости, близким к максимальному (теорема 22).

Глава 1. Оценки числа независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра

Доказываются нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра $6, 7, 8, 9$. Приводится описание структуры экстремальных деревьев в общем случае.

Устанавливается асимптотика числа независимых множеств в полных q–арных деревьях.

1.1. Основные понятия

Через ∂v будем обозначать множество всех вершин, смежных с v. Множества вершин и рёбер графа G обозначаются как $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Через $G \setminus S$ будем обозначать подграф графа G, порождённый множеством вершин $V(G) \setminus S$. Объединением графов G' и G'' называется граф G такой, что $V(G) = V(G') \cup V(G'')$ и $E(G) = E(G') \cup E(G'')$ (обозначение: $G = G' \cup G''$). Везде далее подразумевается, что множества вершин входящих в объединение графов не пересекаются.

Ёмкостью графа G будем называть величину

$$c(G) = (i(G))^{1/n(G)}.$$

Длиной цепи будем называть число рёбер в ней. *Расстоянием* между вершинами u и v графа называется наименьшая из длин цепей, соединяющих данные вершины (обозначение $\operatorname{dist}(u, v)$). *Диаметром* связного графа G (обозначение $\operatorname{diam}(G)$) называется наибольшее из расстояний между вершинами G. *Эксцентриситетом* вершины v в графе G называется наибольшее из расстояний $\operatorname{dist}(v, u)$, где $u \in V(G)$. Произвольная вершина графа, имеющая наименьший эксцентриситет, называется *центром* графа. Пусть $d,\ n \in \mathbb{N}$, и пусть $d < n$. Всякое дерево диаметра d на n вершинах, имеющее минимальное (максимальное) число независимых множеств среди всех деревьев с данным числом вершин и диаметром, будем называть (n, d)–*минимальным* (соответственно, (n, d)–*максимальным*).

Для дерева T через F_T будем обозначать лес, получающийся удалением из T центральных вершин. Пусть T — произвольное дерево, а T' — его поддерево. Пусть $v \in V(T) \setminus V(T')$, $u \in V(T')$. Будем говорить, что дерево T' *примыкает* вершиной u к вершине v в T, если $\{u, v\} \in E(T)$ и дерево T' является компонентой связности леса $T \setminus \{v\}$. Например, можно сказать, что во всякой цепи чётного диаметра $2d$ к центральной вершине примыкают своими концевыми вершинами ровно две цепи диаметра $(d-1)$. Через P_t обозначим цепь на t вершинах с выделенной вершиной-корнем. При этом в случае $t \in \{4,5\}$ корнем будем считать центральную вершину, а при $t \in \{1,2,3\}$ — концевую.

Через $T_{p,q,r}$ обозначим такое корневое дерево, что к корню v в нём примыкают ровно p, q и r цепей на 3, 2 и 1 вершинах соответственно, причём цепи на 3 вершинах примыкают к v своими центральными вершинами. Далее мы пишем $T_{p,q}$ вместо $T_{p,q,0}$. Можно проверить, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} n(T_{p,q,r}) &= 3p + 2q + r + 1, \\ i(T_{p,q,r}) &= 5^p 3^q 2^r + 4^p 2^q. \end{aligned}$$

Для натурального d определим величину

$$\widehat{c}(d) = \inf_{\substack{T\text{-дерево,} \\ \mathrm{diam}(T)=d}} c(T). \tag{3}$$

Отметим, что из теоремы 2 и известной формулы Бине для чисел Фибоначчи следует, что

$$\lim_{d\to\infty} \widehat{c}(d) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

***Лемма* 2.** *Для любых графов G_1, G_2 выполнено неравенство*

$$c(G_1 \cup G_2) \geqslant \min\{c(G_1),\, c(G_2)\}.$$

Доказательство. Покажем, что любых положительных чисел a,b,c,d выполнено неравенство

$$(ab)^{1/(c+d)} \geqslant \min\{a^{1/c},\, b^{1/d}\}. \tag{4}$$

Не ограничивая общности, предположим, что $a^{1/c} \leqslant b^{1/d}$. Тогда $b \geqslant a^{d/c}$, откуда $ab \geqslant a^{1+d/c}$. Возводя обе части последнего неравенства в степень $1/(c+d)$, получаем $(ab)^{1/(c+d)} \geqslant a^{1/c}$, что и требовалось. Имеем

$$c(G_1 \cup G_2) = (i(G_1 \cup G_2))^{1/n(G_1 \cup G_2)} = (i(G_1)i(G_2))^{1/(n(G_1)+n(G_2))}.$$

Осталось применить неравенство (4), положив $a = i(G')$, $b = i(G'')$, $c = n(G')$, и $d = n(G'')$. □

***Лемма* 3.** *Пусть T — дерево диаметра d. Тогда если d чётно (нечётно), то каждое дерево в лесе F_T имеет диаметр не больше $d-2$ (соответственно, $d-3$).*

Доказательство. Рассмотрим случай чётного d; рассуждение в случае нечётного d аналогично. Пусть T — дерево диаметра d, и пусть v — единственная центральная вершина в T. Пусть $u_1 \dots u_{d/2} v w_1 \dots w_{d/2}$ — диаметральная цепь в T. Допустим, в F_T есть компонента связности T' диаметра d', $d' > d - 2$. Без ограничения общности можно считать, что $V(T') \cap \{u_1, \dots, u_{d/2}\} = \varnothing$. Пусть s — вершина T', смежная с v в T. Если s' и s'' — концы какой-либо диаметральной цепи в T', то одна из цепей $s' \dots s$ и $s'' \dots s$ содержит не меньше $\lfloor (d'+1)/2 \rfloor \geqslant d/2$ рёбер. Пусть это цепь $s' \dots s$, тогда цепь $u_1 \dots u_{d/2} v s \dots s'$ в T содержит не меньше $(d+1)$ рёбер — противоречие с тем, что $\operatorname{diam}(T) = d$. □

Лемма 4. *Для любых n, d, таких что $2 \leqslant d < n$, и любого дерева T диаметра d на n вершинах выполнено неравенство*

$$i(T) > \begin{cases} (\min_{m \leqslant d-2} \widehat{c}(m))^{n-1}, & \text{если } d \text{ чётно} \\ (\min_{m \leqslant d-3} \widehat{c}(m))^{n-2}, & \text{если } d \text{ нечётно} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть T — дерево чётного диаметра d на n вершинах. Пусть v — центр в T. По лемме 3, каждое дерево из леса $F_T = T_n \setminus \{v\}$ имеет диаметр не больше $(d-2)$. Тогда, с учётом леммы 2, имеем

$$i(T) > i(F) = (c(F))^{n-1} \geqslant \left(\min_{m \leqslant d-2} \widehat{c}(m) \right)^{n-1}.$$

Случай нечётного d рассматривается аналогично. □

Лемма 5. *Пусть в дереве T к вершине v примыкают деревья $T_1, \dots, T_k$ вершинами $v_1, \dots, v_k$ соответственно. Пусть деревья $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$ таковы, что $V(T) \cap \bigcup_i V(\widehat{T}_i)$ и $V(\widehat{T}_i) \cap V(\widehat{T}_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $\widehat{T}$ — дерево, полученное из T удалением поддеревьев $T_1, \dots, T_s$ и добавлением поддеревьев $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$ так, что в $\widehat{T}$ деревья $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$ примыкают к v вершинами $u_1, \dots, u_m$ соответственно. Пусть выполнено неравенство*

$$i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m) < i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s).$$

1. *Если*

$$i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\}) < \\ < i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m),$$

то $i(\widehat{T}) < i(T)$.

2. *Если*

$$i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\}) = \\ = i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)$$

и $s < k$, *то* $i(\widehat{T}) < i(T)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &i(T) - i(\widehat{T}) = \\ &= i(T \setminus \{v\}) + i(T \setminus (\{v\} \cup \partial v)) - (i(\widehat{T} \setminus \{v\}) + i(\widehat{T} \setminus (\{v\} \cup \partial v))) = \\ &= i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_k) + i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\}) - \\ &\qquad - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots i(\widehat{T}_m) \cdot i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k) - \\ &\quad - i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \ldots i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) \cdot i(T_{s+1} \setminus \{v_{s+1}\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\}) = \\ &= \Big(i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)\Big) \cdot i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k) \times \\ &\quad \times \left(1 - \tfrac{i(T_{s+1} \setminus \{v_{s+1}\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\})}{i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k)} \cdot \tfrac{i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\})}{i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий леммы, каждый из сомножителей в последнем произведении положителен, из чего и следует утверждение леммы. □

В дальнейшем нам понадобятся два следующих утверждения из [27].

***Лемма* 6** (А. Френдруп и др. [27]). *Пусть дерево T диаметра d имеет минимальное число независимых множеств среди деревьев диаметра d на том же числе вершин. Тогда никакая вершина в T не смежна более чем с двумя висячими вершинами. Если вершина смежна с двумя висячими вершинами, то каждая из них должна лежать на некоторой диаметральной цепи в T.*

***Теорема* 7** (А. Френдруп и др. [27]). *Пусть T_n — дерево диаметра 4 на n вершинах, имеющее минимальное число независимых множеств среди n–вершинных* *деревьев диаметра 4. Тогда $T_5 \simeq P_5$, $T_6 \simeq T_{0,2,1}$. При $n > 6$ $T_n \simeq T_{p,q}$, где $q = 2n+1 \pmod 3$ при $n \geqslant 26$, а при $7 \leqslant n \leqslant 25$ величина q определяется из табл. 1.*

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
q	3	2	4	3	5	4	6	5	4	3	5	4	3	2	4	3	2	1	3

Таблица 1. Значения q в теореме 7

1.2. Число независимых множеств в деревьях диаметра $6..9$

Лемма 7. *Справедливы равенства $\widehat{c}(d) = \phi_{d+1}^{1/(d+1)}$ при $d \leqslant 3$, и $\widehat{c}(4) = 35^{1/7}$. Среди деревьев диаметра 4 ёмкость, равную $\widehat{c}(4)$, имеет только дерево $T_{0,3}$.*

Доказательство. Всякая цепь на $(d+1)$ вершинах имеет ϕ_{d+1} независимых множеств, откуда $\widehat{c}(d) \leqslant \phi_{d+1}^{1/(d+1)}$ при любом d. При $d = 4$ можно указать дерево $T_{0,3}$ диаметра 4, имеющее 7 вершин и 35 независимых множеств, поэтому $\widehat{c}(4) \leqslant 35^{1/7}$. Отметим, что $\phi_1 > \phi_2^{1/2} > \phi_3^{1/3} > \phi_4^{1/4} > 35^{1/7}$.

Для завершения доказательства покажем, что для любого дерева T диаметра d на n вершинах при $d = 4$ выполнено неравенство $i(T) \geqslant 35^{n/7}$, а при $d \leqslant 3$ выполнено неравенство $i(T) \geqslant \phi_{d+1}^{n/(d+1)}$. Для деревьев диаметра 0 и 1 это выполнено. Также утверждение выполнено для деревьев, в которых $n \leqslant d+1$, поскольку в этом случае $i(T) \geqslant \phi_n \geqslant \phi_{d+1}^{n/(d+1)}$. Будем считать, что $n \geqslant d+2$ и дерево T содержит минимальное число независимых множеств среди всех деревьев с заданными n и d.

1. $d = 2$. Тогда T — звезда, и $i(T) = 2^{n-1} + 1 > 5^{n/3}$ при $n \geqslant 4$.

2. $d = 3$. В этом случае

$$i(T) \geqslant 2^{n-2} + 2^{\lfloor n/2-1 \rfloor} + 2^{\lceil n/2-1 \rceil} > 8^{1/4}$$

   (при $5 \leqslant n \leqslant 8$ неравенство $i(T) > 8^{1/4}$ проверяется непосредственно, а при $n \geqslant 9$ выполнено неравенство $2^{(n-2)/n} > 8^{1/4}$).

3. $d = 4$. Проведём индукцию по n. Тот факт, что при $n = \overline{6, 13}$ всякое n–вершинное дерево диаметра 4, не изоморфное $T_{0,3}$, имеет ёмкость больше $35^{1/7}$, проверяется непосредственно с учётом теоремы 7 (это составляет базис индукции). Пусть $n \geqslant 14$ и все деревья T' диаметра d на $n' < n$ вершинах содержат не менее $35^{n'/7}$ независимых множеств. Так как $n \geqslant 14$, то из теоремы 7 следует, что дерево, на котором достигается минимум числа независимых множеств при заданном n и $d = 4$, содержит две висячие вершины w и w', имеющие общего соседа v. Воспользовавшись предположением индукции, получаем

$$\begin{aligned} i(T) &= i(T \setminus \{w\}) + 2i(T \setminus \{w, w', v\}) \geqslant \\ &\geqslant 35^{(n-1)/7} + 2 \cdot 35^{(n-3)/7} = \\ &= 35^{n/7}(35^{-1/7} + 2 \cdot 35^{-3/7}) > 35^{n/7}, \end{aligned}$$

что завершает индуктивный переход. Лемма доказана.

□

Теорема 8. 1. *Всякое дерево диаметра 6 на n вершинах содержит не менее $35^{(n-1)/7}$ независимых множеств.*

2. *Всякое дерево диаметра 7 на n вершинах содержит не менее $35^{(n-2)/7}$ независимых множеств.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 4 и 7. □

Замечание. *Оценки 1 и 2 теоремы 8 асимптотически точны соответственно при $n \equiv 1 \pmod 7$ и $n \equiv 2 \pmod 7$.*

Доказательство. Рассмотрим дерево T' на $(7t + 1)$ вершинах диаметра 6, такое, что к центральной вершине в нём примыкают t деревьев вида $T_{0,3}$. Имеем $i(T') = 35^t + 27^t \sim 35^t$. Аналогично можно рассмотреть дерево T'' диаметра 7 на $(7t + 2)$ вершинах, такое, что к одной из центральных вершин примыкают $\lfloor t/2 \rfloor$ деревьев $T_{0,3}$, а к другой — $\lceil t/2 \rceil$ деревьев $T_{0,3}$. Имеем $i(T'') = 35^t + 27^{\lfloor t/2 \rfloor}35^{\lceil t/2 \rceil} + 35^{\lfloor t/2 \rfloor}27^{\lceil t/2 \rceil} \sim 35^t$. □

Обозначим через $\widetilde{T}_6$ такое дерево диаметра 6, что при удалении центральной вершины в $\widetilde{T}_6$ получившийся лес состоит из четырёх пятивершинных цепей. Имеем $n(\widetilde{T}_6) = 21$, $i(\widetilde{T}_6) = 35122$, откуда $c(\widetilde{T}_6) = 35122^{1/21}$. По определению отсюда следует, что $\widehat{c}(6) \leqslant 35122^{1/21}$. Дерево $\widetilde{T}_6$ изображено на рис. 2.

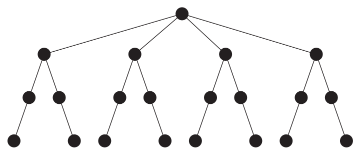

Рис. 2. Дерево $\widetilde{T}_6$

Лемма 8. *При $j \leqslant 5$ справедливо неравенство $\widehat{c}(j) > \widehat{c}(6)$.*

Доказательство. Неравенства $\widehat{c}(j) > \widehat{c}(6)$ при $j \leqslant 4$ следуют из леммы 7 и неравенств $35^{1/7} > 35122^{1/21} \geqslant \widehat{c}(6)$.

Докажем, что $\widehat{c}(5) > \widehat{c}(6)$. Пусть T — произвольное $(n,5)$–минимальное дерево. Рассмотрим два случая:

1. Пусть дерево T имеет следующий вид: при удалении из T двух центральных вершин u, v и инцидентных им рёбер получившийся лес состоит из 2–вершинных цепей, причём вершина u смежна с концами p цепей, а вершина v с концами q цепей, $p, q \geqslant 1$, $p + q = n/2 - 1$. Тогда

$$c(T) = (i(T))^{1/n(T)} = (3^{p+q} + 2^p 3^q + 3^p 2^q)^{\frac{1}{2(p+q+1)}}.$$

Минимум выражения $3^{p+q} + 2^p 3^q + 3^p 2^q$ при ограничениях $p + q = A$ и $p, q \geqslant 1$ достигается при $p = q = A/2$. Отсюда

$$c(T) \geqslant \inf_{n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 6} (3^{n/2-1} + 2 \cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n}.$$

Неравенство

$$(3^{n/2-1} + 2 \cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n} > 35122^{1/21}$$

при $6 \leqslant n \leqslant 21$ проверяется непосредственно, а при $n \geqslant 22$ выполнено неравенство

$$(3^{n/2-1} + 2 \cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n} > 3^{5/11} > 35122^{1/21}.$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда дерево T имеет вид, отличный от рассмотренного в п. 1. Заметим, что в этом случае в T найдётся вершина, к которой примыкают концевыми вершинами две цепи, первая из которых содержит одну вершину, а вторая p вершин, где $p \in \{1,2\}$. Заменим их одной цепью на $(p+1)$ вершинах. Из п. 2 леммы 5 вытекает, что для полученного дерева $\widehat{T}$ выполнены соотношения $i(\widehat{T}) < i(T)$ и $n(\widehat{T}) = n(T)$. Кроме того, $\operatorname{diam}(\widehat{T}) \in \{5,6\}$. Если $\operatorname{diam}(\widehat{T}) = 5$, то дерево T не является (n,d)–минимальным — противоречие с выбором T. Если же $\operatorname{diam}(\widehat{T}) = 6$, то $c(T) > i(\widehat{T}) > \widehat{c}(6)$.

□

Оценка величины $\widehat{c}(6)$

Пусть T — какое-нибудь дерево диаметра 6 на n вершинах, имеющее минимальное число независимых множеств среди всех n–вершинных деревьев диаметра d. Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — деревья, примыкающие к центральной вершине v дерева T вершинами $v_1, \ldots, v_k$ соответственно. Будем считать $T_1, \ldots, T_k$ корневыми деревьями с корнями $v_1, \ldots, v_k$. Говоря о замене в дереве T поддерева T_i на корневое дерево $\widehat{T}_i$, мы будем считать, что замена производится так, что в получившемся дереве поддерево $\widehat{T}_i$ примыкает к вершине v своим корнем. Замену назовем *уменьшающей*, если выполнены условия леммы 5, то есть при такой замене число независимых множеств в результирующем дереве строго меньше, чем в исходном. В табл. 2 приведены возможные замены, и указаны условия, при которых они являются уменьшающими.

Отметим, что в дереве T нельзя провести ни одной из указанных уменьшающих замен (иное противоречило бы (n,d)–минимальности T). Из лемм 3 и 6 вытекает

***Утверждение* 1.** *Каждое из деревьев $T_1, \ldots, T_k$ либо имеет диаметр не больше 3, либо имеет вид $T_{p,q,r}$, где $r \leqslant 1$.*

Из невозможности проведения замен S1 и S2 вытекает следующий факт.

***Утверждение* 2.** *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T при $r > 0$ не может быть деревьев вида $T_{p,q,r}$, отличных от P_2, P_4 и $T_{0,2,1}$.*

Из утверждения 2, леммы 6 и невозможности проведения замен S3-S9 следует

***Утверждение* 3.** *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T, имеющих диаметр меньше 4, могут быть только деревья P_2, P_3, P_4.*

№	T_i	$\widehat{T}_i$	Условия
S1	$T_{0,q,1}$	$T_{1,q-1,0}$	$q \geqslant 3$
S2	$T_{p,q,1}$	$T_{p-1,q+2,0}$	$p \geqslant 1,\ q \geqslant 0$
S3	$T_{p,q},\ P_1$	$T_{p,q-1},\ P_3$	$\left[\begin{array}{l} p\geqslant 0, q\geqslant 2 \\ p\geqslant 1, q=1 \end{array}\right.$
S4	$T_{p,0},\ P_1$	$T_{p-2,2},\ P_3$	$p \geqslant 2$
S5	$P_2,\ P_1$	P_3	
S6	$P_3,\ P_1$	$P_2,\ P_2$	
S7	$P_4,\ P_1$	$P_3,\ P_2$	
S8	$T_{0,2,1},\ P_1$	$T_{0,3}$	
S9	$T_{1,0}$	P_4	
S10	$T_{0,q}$	$T_{2,q-3}$	$q \geqslant 7$
S11	$T_{0,6}$	$T_{0,3},\ T_{0,2,1}$	
S12	$P_2,\ P_2,\ P_3$	$P_2,\ P_5$	
S13	$P_2,\ P_2,\ P_2$	$P_3,\ P_3$	

Таблица 2. Уменьшающие замены в деревьях диаметра 6

Невозможность проведения замен S10 и S11 влечёт следующее

***Утверждение* 4.** *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T не может быть деревьев $T_{0,q}$ при $q \geqslant 6$.*

Из невозможности проведения замен S12 и S13 вытекает

***Утверждение* 5.** *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T не может быть больше двух деревьев вида P_2. Если среди $T_1, \ldots, T_k$ есть дерево P_3, то среди $T_1, \ldots, T_k$ не больше одного дерева вида P_2.*

***Лемма* 9.** *Всякое дерево диаметра 6 на n вершинах содержит не менее $35122^{n/21}$ независимых множеств. Ёмкость всякого дерева диаметра 6, не изоморфного $\widetilde{T}_6$, строго больше, чем $35122^{1/21}$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n. При $n = 7$ имеем $i(T) = 34 > > 35122^{1/3}$, и утверждение теоремы выполнено. Пусть $n > 7$ и утверждение леммы выполнено при всех n', $n' < n$. Пусть T — дерево на n вершинах, имеющее минимальное число независимых множеств среди деревьев диаметра 6 на n вершинах. Если $n \geqslant 54$, то из теоремы 8 следует, что

$$c(T) \geqslant 35^{\frac{n-1}{7n}} \geqslant 35^{53/378} > 35122^{1/21}.$$

Далее считаем $n \leqslant 53$. Если в T есть две висячие вершины u, v, имеющие общего соседа w, то, воспользовавшись предположением индукции и неравенством $\widehat{c}(j) \geqslant 35122^{1/21}$, $j \leqslant 5$, получаем

$$\begin{aligned} i(T) &= i(T \setminus \{u\}) + i(T \setminus \{u, w\}) \geqslant \\ &\geqslant 35122^{(n-1)/21} + 2 \cdot 35122^{(n-3)/21} = \\ &= 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 2 \cdot 35122^{-1/7}) > \\ &> 35122^{n/21}. \end{aligned}$$

Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — деревья, примыкающие к центральной вершине v дерева T. Если среди деревьев $T_1, \ldots, T_k$ есть дерево P_4, то, пользуясь предположением индукции, разложив T по висячей вершине, примыкающей к корню в P_4, получим

$$i(T) \geqslant 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 3 \cdot 35122^{-4/21}) > 35122^{n/21}.$$

Аналогично, если среди $T_1, \ldots, T_k$ есть дерево $T_{0,2,1}$, то, разложив T по висячей вершине, примыкающей к корню в $T_{0,2,1}$, получаем

$$i(T) \geqslant 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 9 \cdot 35122^{-2/7}) > 35122^{n/21}.$$

Из утверждений 1–5 следует, что остается рассмотреть следующие случаи:

1. $T_i \simeq T_{0,q_i}$ при $i = \overline{1, k}$, причём $1 \leqslant q_i \leqslant 5$. Тогда $\frac{n-1}{11} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{3}$. Имеем

$$i(T) = (3^{q_1} + 2^{q_1}) \cdot \ldots \cdot (3^{q_k} + 2^{q_k}) + 3^{q_1 + \ldots + q_k}.$$

Функция

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} (3^{x_i} + 2^{x_i})$$

достигает на множестве $\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} x_i = A\}$ минимума в точке $(A/k, \ldots, A/k)$. Поэтому

$$i(T) \geqslant (3^{\frac{n-1-k}{2k}} + 2^{\frac{n-1-k}{2k}})^k + 3^{\frac{n-1-k}{2}}.$$

Перебором по множеству

$$M_1 = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [7,53],\, k \in [\tfrac{n-1}{11},\, \tfrac{n-1}{3}]\right\}$$

можно проверить, что

$$\min_{(n,k)\in M_1} \left(\left(3^{\frac{n-1-k}{2k}} + 2^{\frac{n-1-k}{2k}}\right)^k + 3^{\frac{n-1-k}{2}}\right)^{1/n} = 35122^{1/21},$$

и минимум достигается только в точке $n = 21$, $k = 4$.

2. $T_1 \simeq T_2 \simeq P_2$, и $T_j = T_{0,q_j}$, где $2 \leqslant q_i \leqslant 5$, при $j > 2$. Тогда $n \geqslant 15$ и $\frac{n+17}{11} \leqslant k \leqslant \frac{n+5}{5}$. В этом случае

$$c(T) \geqslant \left(9 \cdot \left(3^{\frac{n-3-k}{2k-4}} + 2^{\frac{n-3-k}{2k-4}}\right)^{k-2} + 4 \cdot 3^{\frac{n-3-k}{2}}\right)^{1/n}.$$

Перебором по множеству

$$M_2 = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [15,53],\, k \in [\tfrac{n+17}{11},\, \tfrac{n+5}{5}]\right\}$$

можно проверить, что

$$\min_{(n,k)\in M_2} \left(9 \cdot \left(3^{\frac{n-3-k}{2k-4}} + 2^{\frac{n-3-k}{2k-4}}\right)^{k-2} + 4 \cdot 3^{\frac{n-3-k}{2}}\right)^{1/n} > 1.65 > 35122^{1/21},$$

(минимум достигается в точке $n = 22$, $k = 5$). В этом случае имеем $c(T) > 35122^{1/21}$.

3. $T_1 \simeq P_2$, и $T_j = T_{0,q_j}$, где $1 \leqslant q_i \leqslant 5$, при $j > 1$. В этом случае $n \geqslant 9$ и $\frac{n+8}{11} \leqslant k \leqslant \frac{n}{3}$. Имеем

$$c(T) \geqslant \left(3 \cdot \left(3^{\frac{n-k}{2k-2}} + 2^{\frac{n-k}{2k-2}}\right)^{k-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\right)^{1/n}.$$

Перебором по множеству

$$M_3 = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [9,53],\, k \in [\tfrac{n+8}{11},\, \tfrac{n}{3}]\right\}$$

можно проверить, что

$$\min_{(n,k)\in M_3} \left(3 \cdot \left(3^{\frac{n-k}{2k-2}} + 2^{\frac{n-k}{2k-2}}\right)^{k-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\right)^{1/n} > 1.68 > 35122^{1/21},$$

(минимум достигается в точке $n = 53$, $k = 9$). В этом случае опять получаем $c(T) > 35122^{1/21}$. Лемма доказана.

$\square$

Из лемм 4, 8 и 9 вытекает следующее утверждение.

***Теорема* 9.** 1. *Всякое дерево диаметра* 8 *на* n *вершинах содержит не менее* $35122^{(n-1)/21}$ *независимых множеств.*

2. *Всякое дерево диаметра* 9 *на* n *вершинах содержит не менее* $35122^{(n-2)/21}$ *независимых множеств.*

Оценки 1 *и* 2 *при* $n \equiv 1 \pmod{21}$ *и* $n \equiv 2 \pmod{21}$ *соответственно асимптотически точны.*

1.3. Структура (n, d)–минимальных деревьев

***Лемма* 10.** *Пусть* d *— чётное положительное число, и пусть найдётся дерево* T *диаметра* d *или* $(d-1)$*, такое, что* $c(T) = \min_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$*. Положим* $n = n(T)$*.*

1. *Найдётся дерево* $\widehat{T}'$ *диаметра* $(d+2)$*, для которого* $c(\widehat{T}') < c(T)$ *и* $n(\widehat{T}') < 2^n$*. Для всякого дерева* T' *диаметра* $(d+2)$ *с числом вершин, превосходящим* $2^{n+1}n$*, выполнено неравенство*

$$c(T') > \left(1 + \frac{1}{5 \cdot 2^n n}\right) c(\widehat{T}').$$

2. *Найдётся дерево* $\widehat{T}''$ *диаметра* $(d+3)$*, для которого* $c(\widehat{T}'') < c(T)$ *и* $n(\widehat{T}'') < 2^n$*. Для всякого дерева* T'' *диаметра* $(d+3)$ *с числом вершин, превосходящим* $2^{n+1}n$*, выполнено неравенство*

$$c(T'') > \left(1 + \frac{1}{100 \cdot 2^n n}\right) c(\widehat{T}'').$$

Доказательство. Пусть T — дерево из условия леммы. Пусть $n(T) = n$, $i(T) = i$. При $d \leqslant 4$ справедливость утверждения леммы легко проверяется. Далее считаем, что $d \geqslant 6$ и $n \geqslant 10$. Кроме того, так как $c(T) \leqslant \widehat{c}(6) = 35122^{1/21} < 5/3$, то $i < (5/3)^n$. Пусть u — центральная вершина в T; будем считать её корневой вершиной T. Положим $i_0 = i(T \setminus \{u\})$. Пусть $k \geqslant 2$, $T_1, \ldots, T_k$ — копии дерева

T, и пусть $v \notin \bigcup_j V(T_j)$. Соединив корни деревьев $T_1, \ldots, T_k$ с вершиной v, получим дерево $\widehat{T}'$, имеющее диаметр $(d+2)$. Найдём k, при котором выполнено неравенство $c(\widehat{T}') < c(T)$:

$$\begin{aligned} c(\widehat{T}) < c(T) \; &\Leftrightarrow (i^k + i_0^k)^{1/(1+kn)} < i^{1/n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left((i_0/i)^k + 1\right)^n < i \;\Leftrightarrow\; k > \frac{\ln \frac{1}{i^{1/n}-1}}{\ln(i/i_0)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает, что $i^{1/n} \geqslant (\phi_n)^{1/n} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, откуда

$$\ln \frac{1}{i^{1/n}-1} < \ln \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Поскольку для дерева T выполнено равенство $c(T) = \widehat{c}(d)$, то

$$i \leqslant \widehat{c}(6)^n < (5/3)^n.$$

Далее, из неравенств $i_0 < i < (5/3)^n$, а также из неравенства $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{2}$, верного при $x \in (0,1)$, следует

$$\frac{1}{\ln(i/i_0)} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{i-i_0}{i_0}\right)} \leqslant \frac{2i_0}{i-i_0} \leqslant 2 \cdot (5/3)^n. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{\ln \frac{1}{i^{1/n}-1}}{\ln(i/i_0)} < (5/3)^n,$$

поэтому при $k > (5/3)^n$, с учётом (5), будет выполнено неравенство $c(\widehat{T}') < c(T)$. Далее считаем, что $k = 2^n - 1$, и $\widehat{T}'$ — дерево, соответствующее такому k. Из сказанного выше следует, что $c(\widehat{T}') < c(T)$. При этом $n(\widehat{T}') = 1 + n(2^n - 1) < 2^n$. Отсюда следует первое утверждение первой части леммы.

Рассмотрим произвольное дерево T' диаметра $(d+2)$ на n' вершинах, где $n' \geqslant 2kn$. По лемме 4, выполнено неравенство $c(T') > i^{(n'-1)/n}$. Оценим отношение $\alpha = \frac{c(T')}{c(\widehat{T}')}$:

$$\begin{aligned} \alpha \; &> 1 + \ln \alpha > \\ &> 1 + \ln \frac{i^{\frac{n'-1}{n'n}}}{(i^k + i_0^k)^{1/(1+kn)}} = \\ &= 1 + \frac{n' - 1 - kn}{n'n(1+kn)} \ln i - \frac{1}{1+kn} \ln\left(1 + (i_0/i)^k\right). \end{aligned}$$

Отсюда, с учётом неравенства $\frac{i_0}{i} \leqslant 1-\frac{1}{i}$, с использованием неравенств $(1-1/x)^x < e^{-1}$ (при $x>1$) и $\ln(1+x) < x$ (при $x>0$), получаем

$$\begin{aligned} \alpha &> 1 + \frac{n'-1-kn}{n'n(1+kn)}\ln i - \frac{1}{1+kn}\ln\left(1+e^{-k/i}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{(1+kn)}\left(\frac{n'-1-kn}{n'n}\ln i - e^{-k/i}\right). \end{aligned}$$

Из неравенств $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < i < (5/3)^n$ и равенства $k = 2^n - 1$, с учётом $n \geqslant 10$, следует, что $\ln i > 6n/25$ и $e^{-k/i} < 1/400$. Отсюда

$$\alpha > 1 + \frac{1}{(1+kn)}\left(\frac{6(n'-1-kn)}{25n'} - \frac{1}{400}\right).$$

Нетрудно проверить, что последнее неравенство при $n' \geqslant 2kn$ и $kn > 100$ влечёт неравенство $\alpha > 1 + \frac{1}{5kn}$, что завершает доказательство первой части леммы.

Аналогично доказывается вторая часть леммы, касающаяся деревьев диаметра $(d+3)$. Для чётного k рассматривается дерево $\widehat{T}''$ на $(kn+2)$ вершинах, такое, что к каждой из двух его центральных вершин примыкают по $k/2$ деревьев, изоморфных T. Аналогично устанавливается, что при $k > 5\cdot(5/3)^n$ выполнено неравенство $c(\widehat{T}'') < c(T)$. Далее, для $k = 2^n - 2$, соответствующего дерева $\widehat{T}''$, и всякого дерева T'' диаметра $(d+3)$ на n'' вершинах, где $n'' \geqslant 2kn$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{c(T'')}{c(\widehat{T}'')} &> 1 + \ln\frac{i^{\frac{n'-2}{n'n}}}{\left(i^k + i^{k/2}\cdot i_0^{k/2}\right)^{1/(2+kn)}} > \\ &> 1 + \frac{1}{2+kn}\left(\frac{2n'-2kn-4}{n'n}\ln i - 2e^{-k/(2i)}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2+kn}\left(\frac{12(n'-kn-2)}{25n'} - \frac{1}{10}\right) > 1 + \frac{1}{100kn}. \end{aligned}$$

□

***Утверждение* 6.** *Пусть натуральные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенствам a, $b \leqslant M$, x, $y \leqslant N$ и $a^{1/x} > b^{1/y}$. Тогда $\frac{a^{1/x}}{b^{1/y}} > 1 + \frac{1}{MN(2M)^N}$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{a^{1/x}}{b^{1/y}} = \left(1 + \frac{a^{y/x}-b}{b}\right)^{1/y} > 1 + \frac{a^{y/x}-b}{yb}. \tag{8}$$

Возможны два случая:

1. $a^{y/x} \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку $a^{y/x} > b$, из (8) следует, что

$$\frac{a^{1/x}}{b^{1/y}} > 1 + \frac{1}{yb} > 1 + \frac{1}{MN}.$$

2. $a^{y/x} \notin \mathbb{N}$. Положим $\rho = a^{y/x} - \lfloor a^{y/x} \rfloor$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \ni \left(\left\lfloor a^{y/x} \right\rfloor + \rho \right)^x &= \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} \left\lfloor a^{y/x} \right\rfloor^{x-k} \rho^k = \\ &= \left\lfloor a^{y/x} \right\rfloor^x + \rho \sum_{k=1}^{x} \binom{x}{k} \left\lfloor a^{y/x} \right\rfloor^{x-k} \rho^{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, и из неравенств $0 < \rho < 1$ следует, что

$$\rho \geqslant \left(\sum_{k=1}^{x} \binom{x}{k} \left\lfloor a^{y/x} \right\rfloor^{x-k} \rho^{k-1} \right)^{-1} > \frac{1}{(a^{y/x}+1)^x} > \frac{1}{2^x a^y}. \tag{9}$$

Используя (8) и (9), получаем

$$\frac{a^{1/x}}{b^{1/y}} > 1 + \frac{\rho}{yb} > 1 + \frac{1}{2^x a^y yb} > 1 + \frac{1}{MN(2M)^N}.$$

□

***Лемма* 11.** *Если T_1 и T_2 — деревья на n_1 и n_2 вершинах, $n_1, n_2 \leqslant N$, и $c(T_1) > c(T_2)$, то $c(T_1)/c(T_2) > 1 + 3^{-N^2-2}$.*

Доказательство. Применим утверждение 6, положив $a = i(T_1)$, $b = i(T_2)$, $x = n_1$, $y = n_2$. Из ограничений n_1, $n_2 \leqslant N$ и $i(T_1)$, $i(T_2) < 2^N$, следует

$$\frac{c(T_1)}{c(T_2)} > 1 + \frac{1}{2^N \cdot N(2^{N+1})^N} > 1 + \frac{1}{3^{N^2+2}}.$$

□

Определим функцию $\mathrm{TOW}(x)$ натурального аргумента x следующим образом: $\mathrm{TOW}(1) = 2$ и $\mathrm{TOW}(x+1) = x \cdot 2^{\mathrm{TOW}(x)}$ при $x \geqslant 1$.

***Лемма* 12.** *В определении величины $\widehat{c}(d)$ (в правой части (3)) точная нижняя грань достигается, причём только на деревьях с не более чем $\mathrm{TOW}(d)$ вершинами. Для всякого дерева T диаметра d с более чем $\mathrm{TOW}(d)$ вершинами выполнено неравенство $c(T) > \left(1 + \frac{1}{100 \cdot \mathrm{TOW}(d)}\right) \widehat{c}(d)$. Для всякого дерева T диаметра d такого, что $c(T) > \widehat{c}(d)$, выполнено неравенство $c(T) > \left(1 + \frac{1}{3^{(\mathrm{TOW}(d))^2}}\right) \widehat{c}(d)$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует по индукции из лемм 10 и 11. □

***Теорема* 10.** *Пусть d — произвольное натуральное число. Найдётся такое конечное множество деревьев $\mathcal{M}_d$, что для любого n и любого (n,d)–минимального дерева T каждая из компонент леса F_T изоморфна некоторому дереву из $\mathcal{M}_d$. Возможно выбрать множество $\mathcal{M}_d$ так, что $|\mathcal{M}_d| < 4^{200(\mathrm{TOW}(d))^2}$.*

Доказательство. Пусть T — произвольное дерево диаметра d. Покажем, что каждая из компонент связности F_T имеет не более $200(\mathrm{TOW}(d))^2$ вершин, отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Допустим, в F нашлось дерево T' на n' вершинах, и $n' > 200(\mathrm{TOW}(d))^2$. По лемме 12, найдётся дерево T_d, такое, что $n(T_d) = n < \mathrm{TOW}(d)$ и $c(T_d) = \widehat{c}(d)$. По лемме 12, выполнено неравенство

$$i(T') > \left(1 + \frac{1}{100 \cdot \mathrm{TOW}(d)}\right)^{n'} (c(T))^{n'}.$$

Отсюда, и из неравенства $(1 + 1/x)^x > 2$ (при $x > 1$) следует, что

$$i(T') > 2^{n'/(100 \cdot \mathrm{TOW}(d))}(c(T))^{n'}.$$

Заменим в F_T дерево T' на $\lfloor n'/n \rfloor$ копий дерева T_d и $n' - n \cdot \lfloor n'/n \rfloor$ изолированных вершин. Для полученного леса $\widehat{F}$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\frac{i(\widehat{F})}{i(F_T)} &< \frac{(c(T))^{n'-n} \cdot 2^n}{2^{n'/(100 \cdot \mathrm{TOW}(d))}(c(T))^{n'}} < \\ &< 2^{\mathrm{TOW}(d) - n'/(100 \cdot \mathrm{TOW}(d))} < \\ &< 2^{-\mathrm{TOW}(d)}.\end{aligned}$$

Для дерева $\widehat{T}$, полученного из T заменой леса F_T на лес $\widehat{F}$, по лемме 5, будет выполнено неравенство $i(\widehat{T}) < i(T)$, в то время как, по построению $\widehat{T}$, выполнены равенства $n(\widehat{T}) = n(T)$ и $\mathrm{diam}(\widehat{T}) = \mathrm{diam}(T)$. Это противоречит (n,d)–минимальности T. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Совершенно аналогично доказывается

Теорема **11.** *Пусть d — чётное число, и $\mathcal{M}_d$ — множество всех деревьев T', для которых $c(T') = \min_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$. Тогда для $d' \in \{d+2,\, d+3\}$, произвольного натурального числа n, и произвольного (n, d')–минимального дерева T в лесе F_T не более $2 \cdot 3^{(\mathrm{TOW}(d))^2}$ вершин лежат в компонентах связности, не изоморфных деревьям из $\mathcal{M}_d$.*

Теорема **12.** *Пусть d — чётное натуральное число, и $\mathcal{M}_d$ — множество всех деревьев T', для которых $c(T') = c_d = \min_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$. Пусть $d' \in \{d+2,\, d+3\}$. Рассмотрим множество*

$$\mathcal{J}_d = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists T' \in \mathcal{M}_d,\, |V(T')| = j\}.$$

Назовём число q разложимым по $\mathcal{J}_d$, если $q = \sum_{s=1}^{l} j_s$ для некоторых (не обязательно различных) чисел $j_1, \ldots, j_l \in \mathcal{J}_d$. Существует такая константа N, что для всех n, $n \geqslant N$, таких, что $(n - d' + d + 1)$ разложимо по $\mathcal{J}_d$, и произвольного (n, d')–минимального дерева T, каждая из компонент леса F_T изоморфна некоторому дереву из $\mathcal{M}_d$.

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству предыдущих теорем. Рассмотрим случай $d' = d + 2$. Положим

$$\begin{aligned}
\delta &= \inf_{T' \notin \mathcal{M}_d} \frac{c(T')}{c_d},\\
m &= \min_{T' \in \mathcal{M}_d} n(T'),\\
t &= \max_{\substack{T' \in \mathcal{M}_d,\\ v \in V(T')}} \frac{i(T' \setminus \{v\})}{i(T')}.
\end{aligned}$$

Очевидно, $t < 1$ и $m \geqslant 2$. Кроме того, из леммы 12 следует, что $\delta > 1$. Пусть $\widehat{T}$ — произвольное n–вершинное дерево диаметра d', такое, что каждая компонента $F_{\widehat{T}}$ изоморфна какому-либо дереву из $\mathcal{M}_d$ (в силу разложимости числа $(n-1)$ по $\mathcal{J}_d$, хотя бы одно такое дерево $\widehat{T}$ существует). Имеем $i(\widehat{(T)}) \leqslant (t^{(1-1/m)(n-1)} + 1)c_d^{n-1}$. Поскольку $t^{(1-1/m)} < 1$, то при всех достаточно больших n выполнено неравенство $t^{(1-1/m)(n-1)} < \delta - 1$, а значит и неравенство $i(\widehat{(T)}) < \delta c_d^{n-1}$. Тогда при всех достаточно больших n для любого (n, d')–минимального дерева T каждая из компонент

F_T должна быть изоморфна дереву из $\mathcal{M}_d$, ибо в противном случае выполнялось бы неравенство $i(T) > \delta c_d^{n-1} > i(\widehat{(T)})$. □

Из теоремы 12 вытекает, в частности

Следствие. *При $d \in \{6,7\}$ и при всех достаточно больших n вида $7k+d-5$, $k \in \mathbb{N}$, для любого (n,d)–минимального дерева T все компоненты леса F_T изоморфны дереву $T_{0,3}$. При $d \in \{8,9\}$ и при всех достаточно больших n вида $21k+d-7$, $k \in \mathbb{N}$, для любого (n,d)–минимального дерева T все компоненты леса F_T изоморфны дереву $\widetilde{T}_6$.*

Из лемм 7, 9, 12 следует

***Теорема* 13.** *Существует такое число N', что для $d \in \{6,7\}$ и всякого (n,d)–минимального дерева T' число вершин в $F_{T'}$, не лежащих в компонентах связности, изоморфных $T_{0,3}$, не превосходит N'. Существует такое число N'', что для $d \in \{8,9\}$ и всякого (n,d)–минимального дерева T'' число вершин в $F_{T''}$, не лежащих в компонентах связности, изоморфных $\widetilde{T}_6$, не превосходит N''.*

1.4. Радиально регулярные деревья

При $d \leqslant 6$ деревья чётного диаметра d, имеющие минимальную ёмкость, обладают некоторой симметрией, которая выражается в следующем определении. Назовём дерево чётного диаметра *радиально регулярным*, если степени всех вершины дерева, находящихся на одном расстоянии от центра дерева, совпадают. Нам кажется правдоподобным следующее утверждение.

***Предположение* 1.** *Любое дерево чётного диаметра, имеющее минимальную ёмкость, является радиально регулярным.*

Доказательство гипотезы 1 дало бы возможность существенного сокращения перебора при поиске минимальных по ёмкости деревьев, поскольку радиально регулярные деревья диаметра d однозначно определяются $\frac{d-2}{2}$ параметрами — степенями вершин на одинаковом расстоянии от центра. Пусть q_j — степень вершин радиально регулярного дерева диаметра d, находящихся от центра на расстоянии j, $0 \leqslant j \leqslant \frac{d-2}{2}$. Тогда, если число вершин в дереве не превосходит n, то q_j должны удовлетворять ограничениям

$$1 + \sum_{k=1}^{d/2} \prod_{j=0}^{k-1} q_j \leqslant n. \tag{10}$$

Через q_j число $i_{q_0,\ldots,q_{d/2-1}}$ независимых множеств в соответствующем дереве можно рассчитать с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} i_{q_{d/2-1}} &= 2^{q_{d/2-1}} + 1, \\ i_{q_{d/2-2},q_{d/2-1}} &= i_{q_{d/2-1}}^{q_{d/2-2}} + 2^{q_{d/2-2}q_{d/2-1}}, \\ i_{q_j,\ldots,q_{d/2-1}} &= i_{q_{j+1},\ldots,q_{d/2-1}}^{q_j} + i_{q_{j+2},\ldots,q_{d/2-1}}^{q_j q_{j+1}}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично лемме 4 устанавливается следующий факт.

Утверждение 7. *Если T — дерево, имеющее минимальную ёмкость среди радиально регулярных деревьев диаметра $(d-2)$, то для любого радиально регулярного n–вершинного дерева T' диаметра d выполнено неравенство $c(T') > c(T)^{(n-1)/n}$.*

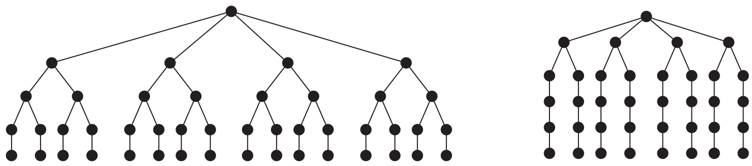

Рис. 3. Деревья $\widetilde{T}_8$ и $\widetilde{T}_{10}$

Из утверждения 7 и равенства $\widehat{c}(6) = 35122^{1/21}$ вытекает

Утверждение 8. *Среди радиально регулярных деревьев диаметра 8 минимальную ёмкость имеет только дерево $\widetilde{T}_8$ (рис. 3).*

Доказательство. Имеем $c(\widetilde{T}_8) = 4721980721^{1/45}$. Для любого дерева T диаметра 8 с числом вершин $n \geqslant 147$, по утверждению 7, выполнено неравенство

$$c(T) > 35122^{146/(21\cdot 147)} > c(\widetilde{T}_8)$$

. Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением деревьев с $n \leqslant 146$. При таких n существует всего 1552 набора $q_0, \ldots, q_{d/2-1}$, удовлетворяющих условию (10). Перебором по всем этим наборам устанавливается справедливость утверждения. □

Аналогично находятся минимальные по ёмкости радиально регулярные деревья диаметра $10 \div 26$. Их параметры приведены в табл. 3. Экстремальное дерево $\widetilde{T}_{10}$ диаметра 10 также изображено на рис. 3. Из определения величины $\widehat{c}(d)$ следует, что верхние оценки для числа независимых множеств в радиально регулярных деревьях диаметра d являются верхними оценками для $\widehat{c}(d)$.

Диаметр	Число вершин	Последовательность $q_0, \ldots, q_{d/2-1}$	Ёмкость (оценка сверху)
8	45	$4, 2, 2, 1$	1.6405163
10	37	$4, 2, 1, 1, 1$	1.6350322
12	45	$4, 2, 1, 1, 1, 1$	1.6322615
14	53	$4, 2, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6300187
16	201	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6282445
18	231	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6269451
20	261	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6259081
22	291	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6250981
24	321	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6244353
26	351	$5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	1.6238877

Таблица 3. Экстремальные радиально регулярные деревья

1.5. Асимптотика числа независимых множеств в полных q–арных деревьях

Рассмотрим последовательность $\{\iota_{q,k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\iota_{q,k}$ — число независимых множеств в q–арном дереве, имеющем k ярусов рёбер, или, что то же, диаметр $2k$. Отметим, что полные q–арные деревья являются частным случаем радиально регулярных деревьев. В данном разделе доказывается обобщение теоремы 4 на случай произвольного q (теорема 15).

Далее через $\{x_{q,k}\}_{k=0}^{\infty}$ будем обозначать последовательность, заданную соотношениями

$$\begin{aligned} x_{q,0} &= 2, \\ x_{q,k+1} &= 1 + x_{q,k}^{-q} \text{ при } k \geqslant 0. \end{aligned}$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

***Утверждение* 9.** *Пусть q, t, s — произвольные положительные числа, такие, что $t \in [1, 2]$ и $s = 1 + t^{-q}$.*

1. *Если $t > 1 + t^{-q}$ и $t > 1 + (1 + t^{-q})^{-q}$, то $s < 1 + s^{-q}$ и $s < 1 + (1 + s^{-q})^{-q}$.*

2. *Если $t < 1 + t^{-q}$ и $t < 1 + (1 + t^{-q})^{-q}$, то $s > 1 + s^{-q}$ и $s > 1 + (1 + s^{-q})^{-q}$.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения, вторая доказывается аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} t > 1 + t^{-q} &\Leftrightarrow t^{-q} < (1 + t^{-q})^{-q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + t^{-q} < 1 + (1 + t^{-q})^{-q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow s < 1 + s^{-q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t > 1 + (1 + t^{-q})^{-q} &\Leftrightarrow 1 + t^{-q} < 1 + (1 + (1 + t^{-q})^{-q})^{-q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow s < 1 + (1 + s^{-q})^{-q}. \end{aligned}$$

□

***Утверждение* 10.** *Пусть q — произвольная положительная константа. Уравнение $x = 1 + x^{-q}$ имеет на отрезке $[1,2]$ единственный действительный корень ξ_q. При $x \in [1,2]$ неравенство $x > 1 + x^{-q}$ $(x < 1 + x^{-q})$ эквивалентно неравенству $x > \xi_q$ (соответственно, $x < \xi_q$).*

Доказательство. Утверждение следует из строгого возрастания и непрерывности функции $f(x) = x^{q+1} - x^q - 1$ на отрезке $[1,2]$, и неравенств $f(1) < 0 < f(2)$. □

На протяжении оставшейся части данного раздела через ξ_q будем обозначать единственный действительный корень уравнения $x^{q+1} - x^q - 1 = 0$, лежащий на отрезке $[1,2]$.

***Утверждение* 11.** *При любом $q \geqslant 5$ существует такое положительное $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}(q)$, что при любом $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon})$ справедливы неравенства*

$$\varepsilon < \xi_q - (1 + (\xi_q + \varepsilon)^{-q}) < q\varepsilon, \tag{11}$$

$$\varepsilon < (1 + (\xi_q - \varepsilon)^{-q}) - \xi_q < q\varepsilon. \tag{12}$$

Доказательство. Покажем вначале, что при $q \geqslant 5$ справедливы неравенства

$$1 < \frac{q}{\xi_q^{q+1}} < q. \tag{13}$$

Неравенство $\frac{q}{\xi_q^{q+1}} < q$ очевидно. Докажем неравенство $1 < \frac{q}{\xi_q^{q+1}}$. Для этого достаточно показать, что $q^{1/(q+1)} > \xi_q$, что, в свою очередь, в силу утверждения 10, равносильно неравенству $q - q^{q/(q+1)} - 1 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & q - q^{q/(q+1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & (q-1)^{q+1} > q^q \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & (q+1)\ln(q-1) - q\ln q > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Функция $f(q) = (q+1)\ln(q-1) - q\ln q$ имеет производную

$$f'(q) = \frac{2}{q-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{q-1}\right),$$

положительную при $g > 1$. Поэтому $f(q)$ возрастает на отрезке $[5, +\infty)$, из чего, с учётом неравенства $f(5) > 0$, следует, что при всех $q \geqslant 5$ выполнено неравенство $f(q) > 0$. Отсюда и из (14) вытекает (13).

Рассмотрим функцию

$$g(\varepsilon) = \xi_q - (1 + (\xi_q + \varepsilon)^{-q}) = \xi_q^{-q} - (\xi_q + \varepsilon)^{-q}.$$

Имеем $g(0) = 0$ и $g'(0) = \frac{q}{\xi^{q+1}}$. Таким образом, в силу (13), получаем $g'(0) \in (1, q)$. Отсюда следует, что при достаточно малых значениях ε выполнено $g(\varepsilon) \in (\varepsilon, q\varepsilon)$, что равносильно (11). Аналогично устанавливается справедливость неравенств (12) при достаточно малых ε. □

Нам потребуется следующий классический результат, принадлежащий Штурму (см., например, [15, §4.2]):

***Теорема* 14** (Ж. Штурм)**.** *Пусть $f(x)$ — полином степени k над $\mathbb{R}$. Пусть последовательность полиномов $f_0, \ldots, f_k$ построена по следующему правилу: $f_0 = f$, $f_1 = f'$, и f_j равен остатку от деления f_{j-2} на f_{j-1}, взятому с обратным знаком, при $j \geqslant 2$. Обозначим через $\omega_f(x)$ число перемен знака в последовательности*

$$f_0(x), \ldots, f_k(x)$$

. Тогда для любых действительных чисел a и b, таких, что $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$, число корней f на отрезке $[a, b]$ равно $\omega_f(a) - \omega_f(b)$.

Последовательность $f_0, \ldots, f_k$ в теореме 14, а также любая последовательность, полиномы которой отличаются от f_j положительными сомножителями, называется *последовательностью Штурма* для полинома $f(x)$.

***Утверждение* 12.** *При $q \in \{2, 3, 4\}$ уравнение*

$$x = 1 + (1 + x^{-q})^{-q} \tag{15}$$

имеет на отрезке $[1, 2]$ единственный действительный корень.

Доказательство. Уравнение (15) равносильно уравнению $f(x) = 0$, где $f(x) = (x-1)(x^q+1)^q - x^{q^2}$. При всех положительных q, очевидно, выполнены неравенства $f(1) < 0 < f(2)$.

1. $q = 2$. Достаточно показать, что $f(x)$ выпукла на отрезке $[1, 2]$. Рассмотрев производную $f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 12x - 4$, при $x \in [1,\, 1.5]$ имеем

$$f''(x) \geqslant -4x^2 + 12x - 4 \geqslant 9x - 4 > 0,$$

а при $x \in [1.5,\, 2]$ получаем $20x^3 \geqslant 30x^2$ и $f''(x) \geqslant 6x^2 + 12x - 4 > 0$.

2. $q = 3$. В этом случае $f(x) = x^{10} - 2x^9 + 3x^7 - 3x^6 + 3x^4 - 3x^3 + x - 1$. При $x \in [1, \frac{9}{8}]$ имеем

$$f(x) \leqslant -\frac{7}{8}x^9 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{3}{8}x^3 + x - 1 \leqslant -\frac{1}{8}x^9 + x - 1 < 0.$$

Таким образом, на отрезке $[1,\, \frac{9}{8}]$ уравнение $f(x) = 0$ корней не имеет. Теперь достаточно показать, что $f(x)$ выпукла на отрезке $[\frac{9}{8},\, 2]$. Имеем

$$f^{(5)}(x) = 30240(x^5 - x^4) + 7560x^2 - 2160x > 0$$

при $x > 1$. Кроме того, вторая, третья и четвёртая производные $f(x)$ в точке $x = \frac{9}{8}$ положительны. Отсюда следует выпуклость функции $f(x)$ при $x \geqslant \frac{9}{8}$.

3. $q = 4$. Воспользуемся теоремой Штурма. В приложении A приведена последовательность Штурма для $f(x)$. Из неё можно определить, что

$$\begin{aligned} (\operatorname{sign} f_0(1), \ldots, \operatorname{sign} f_{17}(1)) &= (-\ 0 + - - + - - - + + + - + - - - +), \\ (\operatorname{sign} f_0(2), \ldots, \operatorname{sign} f_{17}(2)) &= (+ + + - - + - - + + - - + + - + + +), \end{aligned}$$

откуда $\omega_f(1) = 9$, $\omega_f(2) = 8$. Следовательно, по теореме 14, уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[1, 2]$ единственный действительный корень. $\square$

***Лемма* 13.** *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. Тогда*

1. *Последовательность* $\{x_{q,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно убывает, а последовательность* $\{x_{q,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно возрастает. При этом для каждого* k *выполнены неравенства*

$$x_{q,2k+1} < \xi_q < x_{q,2k}.$$

2. *При* $q \in \{2,3,4\}$ *последовательность* $\{x_{q,k}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* ξ_q. *При* $q \geqslant 5$ *последовательность* $\{x_{q,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* ζ_q, *а последовательность* $\{x_{q,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* η_q, *где* η_q *и* ζ_q *суть корни уравнения* $x = 1 + (1 + x^{-q})^{-q}$ *такие, что* $1 < \eta_q < \xi_q < \zeta_q < 2$.

Доказательство. Утверждение п. 1 леммы непосредственно вытекает из утверждений 9 и 10 по индукции, базой индукции служат очевидные соотношения $\xi_q < x_{q,0}$ и $x_{q,2} = 1 + (1 + 2^{-q})^{-q} < 2 = x_{q,0}$.

Сходимость последовательностей $\{x_{q,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{x_{q,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ к конечным пределам сразу следует из ограниченности и монотонности данных последовательностей. Обозначим через ζ_q и η_q соответственно $\lim_{k\to\infty} x_{q,2k}$ и $\lim_{k\to\infty} x_{q,2k+1}$. Очевидно, η_q и ζ_q являются корнями уравнения (15). Кроме того, из неравенств

$$x_{q,2k+1} < \xi_q < x_{q,2k},$$

выполненных для любого k, следует, что $\eta_q \leqslant \xi_q \leqslant \zeta_q$. Согласно утверждению 12, при $q \in \{2,3,4\}$ уравнение (15) имеет на отрезке $[1,2]$ единственный действительный корень. Этот корень, очевидно, совпадает с ξ_q. Поэтому при $q \in \{2,3,4\}$ имеем $\eta_q = \zeta_q = \xi_q$.

Покажем, что при $q \geqslant 5$ выполнены строгие неравенства $\eta_q < \xi_q < \zeta_q$. Предположим, что $\zeta_q = \xi_q$, то есть $x_{q,2k} \downarrow \xi_q$ при $k \to \infty$. Пусть $\widehat{\varepsilon}$ — константа из формулировки утверждения 11. По предположению, найдётся такое k_0, что $x_{q,2k_0} - \xi_q < \widehat{\varepsilon}/q$. Но тогда, применяя два раза утверждение 11, получаем $x_{q,2k_0} - \xi_q < \xi_q - x_{q,2k_0+1} < \widehat{\varepsilon}$ и

$$x_{q,2k_0} - \xi_q < \xi_q - x_{q,2k_0+1} < x_{q,2k_0+2} - \xi_q,$$

что противоречит монотонности последовательности $\{x_{q,2k}\}$. Таким образом, $\zeta_q > \xi_q$. Аналогично устанавливается справедливость неравенства $\eta_q < \xi_q$. $\square$

Для $q \geqslant 2$ положим

$$\gamma_q = \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,j}\right).$$

Величина γ_q корректно определена в силу сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,j}$, которая непосредственно следует из неравенств $0 \leqslant \ln x_{q,j} \leqslant \ln 2$ при всех j.

***Теорема* 15.** *При фиксированном q, $q \in \{2,3,4\}$, справедлива асимптотика при $k \to \infty$:*

$$\iota_{q,k} \sim \beta_q \cdot \gamma_q^{q^k},$$

где β_q определяется из табл. 4.

q	β_q	$\approx$
2	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}-\frac{1}{2}}$	0.6823278
3	$\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}-\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}}{24}} \cdot \left(\sqrt{\frac{18\left(\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}+\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}\right)}{\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}-\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}}-1}-1\right)}$	0.8511709
4	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{100+12\sqrt{69}}}{6}+\frac{\sqrt[3]{100-12\sqrt{69}}}{6}-\frac{1}{3}}$	0.9105257

Таблица 4. Значения β_q в теореме 15

При фиксированном q, $q \geqslant 5$, справедлива асимптотика при $k \to \infty$:

$$\begin{aligned}\iota_{q,2k} &\sim \alpha_{q,0} \cdot \gamma_q^{q^{2k}},\\ \iota_{q,2k+1} &\sim \alpha_{q,1} \cdot \gamma_q^{q^{2k+1}},\end{aligned}$$

где константы $\alpha_{q,0}$ и $\alpha_{q,1}$ удовлетворяют неравенству $\alpha_{q,0} > \alpha_{q,1}$ и определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha_{q,0} &= \left(1 - \left(\lim_{k\to\infty} x_{q,2k}\right)^{-1}\right)^{1/(q^2-1)},\\ \alpha_{q,1} &= \left(1 - \left(\lim_{k\to\infty} x_{q,2k+1}\right)^{-1}\right)^{1/(q^2-1)}.\end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, $\iota_{q,0} = 2$, $\iota_{q,1} = 2^q + 1$. Положив формально $\iota_{q,-1} = 1$, при $k \geqslant 1$ имеем $\iota_k = \iota_{q,k-1}^q + \iota_{q,k-2}^{q^2}$. Рассмотрим последовательность $\{\iota_{q,k}/\iota_{q,k-1}^q\}_{k=0}^{\infty}$.

Поскольку $\iota_{q,0}/\iota_{q,-1}^{q} = 2$, и при $k \geqslant 1$ выполнены равенства

$$\frac{\iota_{q,k}}{\iota_{q,k-1}^{q}} = \frac{\iota_{q,k-1}^{q} + \iota_{q,k-2}^{q^2}}{\iota_{q,k-1}^{q}} = 1 + \left(\frac{\iota_{q,k-1}}{\iota_{q,k-2}^{q}}\right)^{q},$$

то последовательность $\{\iota_{q,k}/\iota_{q,k-1}^{q}\}_{k=0}^{\infty}$ совпадает с $\{x_{q,k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Положим $y_{q,k} = \ln \iota_{q,k}$. При $k \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} y_{q,k} &= \ln\left(\iota_{q,k-1}^{q} + \iota_{q,k-2}^{q^2}\right) = \\ &= q\ln \iota_{q,k-1} + \ln\left(1 + \iota_{q,k-2}^{q^2}/\iota_{q,k-1}^{q}\right) = \\ &= qy_{k-1} + \ln\left(1 + x_{q,k-1}^{-q}\right) = \\ &= qy_{q,k-1} + \ln x_{q,k}. \end{aligned}$$

Отсюда по индукции заключаем, что

$$y_{q,k} = q^k y_{q,0} + \sum_{j=1}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,j} = \sum_{j=0}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,j}. \tag{16}$$

Обозначим $r_q(k) = \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,k+j}$. Преобразуем сумму в правой части (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,j} &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{k-j} \ln x_{q,j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} q^{k-j} \ln x_{q,j} = \\ &= q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,j} - \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,k+j} = \\ &= q^k \ln \gamma_q - r_q(k). \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$\iota_{q,k} = \exp\left(q^k \ln \gamma_q - r_q(k)\right) = \gamma_q^{q^k} \cdot e^{-r_q(k)}. \tag{18}$$

При $q \in \{2,3,4\}$ из леммы 13, в силу монотонной сходимости $x_{q,k}$, следует, что при $k \to \infty$

$$r_q(k) \to (\ln \xi_q) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} = \frac{\ln \xi_q}{q-1}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) при $q \in \{2,3,4\}$ вытекает асимптотика

$$\iota_{q,k} \sim \gamma_q^{q^k} \cdot (\xi_q^{-1})^{1/(q-1)}.$$

Осталось заметить, что ξ_q — корень уравнения $x = 1 + x^{-q}$, а значит величина ξ_q^{-1} является корнем уравнения $x^{q+1} + x - 1 = 0$. При $q \in \{2, 3, 4\}$ последнее уравнение разрешимо в радикалах. Решив его, и положив

$$\beta_q = (\xi_q^{-1})^{1/(q-1)},$$

получаем утверждение теоремы для случая $q \leqslant 4$.

Теперь рассмотрим случай $q \geqslant 5$. Имеем

$$\begin{aligned} r_q(2k) &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,2k+j} = \\ &= q \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} \ln x_{q,2k+2j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} \ln x_{q,2k+2j}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 13 следует, что при $k \to \infty$

$$r_q(2k) \to (q \ln \eta_q + \ln \zeta_q) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} = \frac{\ln(\eta_q^q \zeta_q)}{q^2 - 1}. \tag{20}$$

Аналогично доказывается, что при $k \to \infty$

$$r_q(2k+1) \to \frac{\ln(\zeta_q^q \eta_q)}{q^2 - 1}. \tag{21}$$

Из очевидных равенств $\eta_q = 1 + \zeta_q^{-q}$ и $\zeta_q = 1 + \eta_q^{-q}$ следует, что

$$(\eta_q^q \zeta_q)^{-1} = 1 - \zeta_q^{-1}, \qquad (\zeta_q^q \eta_q)^{-1} = 1 - \eta_q^{-1}. \tag{22}$$

Из (18), (20), (21), (22) вытекает утверждение теоремы при $q \geqslant 5$. □

Глава 2. Оценки числа максимальных независимых множеств в графах фиксированного диаметра

Устанавливается нижняя оценка числа максимальных независимых множеств в графах фиксированного диаметра, а также верхняя оценка числа максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра. Приводится полное описание структуры графов, на которых достигаются указанные оценки.

2.1. Основные понятия

Пусть d, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $d < n$. Всякое дерево диаметра d на n вершинах, имеющее минимальное (максимальное) число м. н. м. среди всех деревьев с данным числом вершин и диаметром, будем называть $(n, d)_{\text{м.н.м.}}$*–минимальным* (соответственно, $(n, d)_{\text{м.н.м.}}$*–максимальным*). Расстоянием от вершины $v \in V(G)$ в графе G до подграфа G' будем называть наименьшее из расстояний от v до вершин из $V(G')$.

Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_{d-1}\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$. Обозначим через $B_{d,p,q}$ дерево диаметра d на множестве вершин $U \cup V \cup W$, такое, что его поддеревья, порождённые множествами $\{u_1\} \cup V$, $\{u_{d-1}\} \cup W$ и U представляют собой соответственно звёзды $K_{1,p}$, $K_{1,q}$ и цепь P_{d-1}. Деревья $B_{d,p,q}$ называются *мётлами (brooms)* (см., например, [39]).

Висячим ребром в графе будем называть произвольное ребро, инцидентное висячей вершине (вершине степени 1).

Будем говорить, что граф G' получен *подразбиением* ребра $e = (v_1, v_2)$ графа G, если $V(G') = V(G) \cup \{v'\}$ и $E(G') = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v_1, v'\}, \{v_2, v'\}\}$.

Обозначим через ψ_n число м. н. м. в цепи на n вершинах. Последовательность ψ_n, очевидно, удовлетворяет соотношению $\psi_n = \psi_{n-2} + \psi_{n-3}$ и начальным условиям $\psi_0 = \psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$. Значения чисел ψ_n для небольших n приведены в табл. 5.

Граф G назовём *квазицепным*, если множество $V(G)$ допускает разбиение

$$V(G) = V_0 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_d$$

со следующими свойствами:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ψ_n	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65

Таблица 5. Значения ψ_n

1. При любом k, $2 \leqslant k \leqslant d$, и любом i, $0 \leqslant i \leqslant d-k$, в G отсутствуют рёбра вида $\{u, u'\}$, где $u \in V_i$, $u' \in V_{i+k}$.
2. Для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, подграф графа G, порождённый множеством $V_i \cup V_{i+1}$, является полным двудольным с долями V_i и V_{i+1}.

Всякое разбиение множества вершин квазицепного, обладающее указанными выше свойствами, будем называть *правильным*.

В дальнейшем мы будем без особых указаний пользоваться тем фактом, что число м. н. м. в графе не меньше, чем число м. н. м. в любом из его порождённых подграфов.

***Утверждение* 13.** *Пусть T — произвольное дерево. Пусть в T есть вершина, смежная с двумя или более листьями, и пусть u — один из этих листьев. Тогда для дерева T', полученного из T удалением вершины u, выполнено равенство $i_M(T') = i_M(T)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если $u_1, \ldots, u_r$ — листья, имеющие общего соседа в T, то во всякое м. н. м. в T либо входят одновременно все вершины $u_1, \ldots, u_r$, либо не входит ни одна из них. □

***Лемма* 14.** *При любых n и d таких, что $4 \leqslant d < n$, в $(n, d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальных деревьях каждая вершина смежна не более чем с одним листом.*

Доказательство. Предположим, что $d \geqslant 4$ и найдётся $(n, d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево T, в котором есть вершина, смежная с двумя и более листьями. Удалив один из этих листьев, получим дерево T', для которого, по утверждению 13, выполнено равенство $i_M(T') = i_M(T)$. Кроме того, очевидно, $\operatorname{diam}(T') = \operatorname{diam}(T)$ и $n(T') = n(T) - 1$. Во всяком дереве, диаметр которого не меньше четырёх, найдётся вершина, либо не смежная ни с одним из листьев, либо являющаяся листом, не лежащим на диаметральной цепи. Пусть v — такая вершина в дереве T'. Добавив в T' новую листовую вершину u и соединив её с v, получим дерево T'', для которого $n(T'') = n(T)$, $\operatorname{diam}(T'') = \operatorname{diam}(T)$ и $i_M(T'') > i_M(T)$. Но это противоречит выбору T как $(n, d)_{\text{м.н.м.}}$–максимального дерева. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

2.2. Нижние оценки числа максимальных независимых множеств в графах фиксированного диаметра

***Утверждение* 14.** *Всякий квазицепной граф диаметра d содержит ψ_{d+1} максимальных независимых множеств.*

Доказательство. Случаи $d \leqslant 2$ тривиальны. Пусть $d \geqslant 3$. Пусть G — квазицепной граф диаметра d, и $V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_{d+1}$ — правильное разбиение его множества вершин. Пусть $P_{d+1} = v_1 v_2 \ldots v_{d+1}$ — цепь на $(d+1)$ вершинах. Заметим, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, и каждого $A \in \mathcal{I}_M(G)$, выполнено одно из равенств $A \cap V_i = \varnothing$, $A \cap V_i = V_i$. Поэтому каждому м. н. м. A в G можно взаимно однозначно сопоставить м. н. м. A' в цепи $v_1 v_2 \ldots v_{d+1}$ по правилу $v_i \in A' \Leftrightarrow V_i \cap A = V_i$. Следовательно, $i_M(G) = i_M(P_{d+1}) = \psi_{d+1}$. $\square$

***Теорема* 16.** *Для любого d, $d \geqslant 4$, и для любого графа G диаметра d выполнено неравенство $i_M(G) \geqslant \psi_{d+1}$, обращающееся в равенство только на квазицепных графах.*

Доказательство. Пусть G — произвольный граф диаметра d. Неравенство $i_M(G) \geqslant \psi_{d+1}$ сразу следует из того, что в G найдётся порождённая цепь на $(d+1)$ вершинах (таковой является, например, любая диаметральная цепь в G).

Допустим, что $i_M(G) = \psi_{d+1}$, и покажем, что в этом случае G является квазицепным графом. Рассмотрим произвольные вершины v_0, $v_d \in V(G)$, находящиеся на расстоянии d. Пусть $P = v_0 v_1 \ldots v_d$ — диаметральная цепь в G. Будем считать, что в G есть вершины, не принадлежащие P. Пусть u — произвольная вершина графа G, находящаяся на расстоянии 1 от цепи P (такая вершина существует в силу связности G и строгого включения $V(P) \subsetneq V(G)$). Не ограничивая общности, будем считать, что расстояние от вершины v_i цепи P, смежной с u, до вершины v_d не меньше, чем до вершины v_0. Рассмотрим подграф G_u графа G, порождённый множеством $V(P) \cup \{u\}$. Заметим, что если $(u, v_i) \in E(G)$ для некоторой вершины $v_i \in V(P)$, то $\{\{u, v_{i-k}\}, \{u, v_{i+k}\}\} \cap E(G) = \varnothing$ для любого $k \geqslant 2$ (иное противоречило бы диаметральности цепи P). Из этого следует, что G_u изоморфен одному из графов на рис. 4a–4i. Нетрудно показать, что для каждого из графов $\widehat{G}$ на рис. 4d–4i при

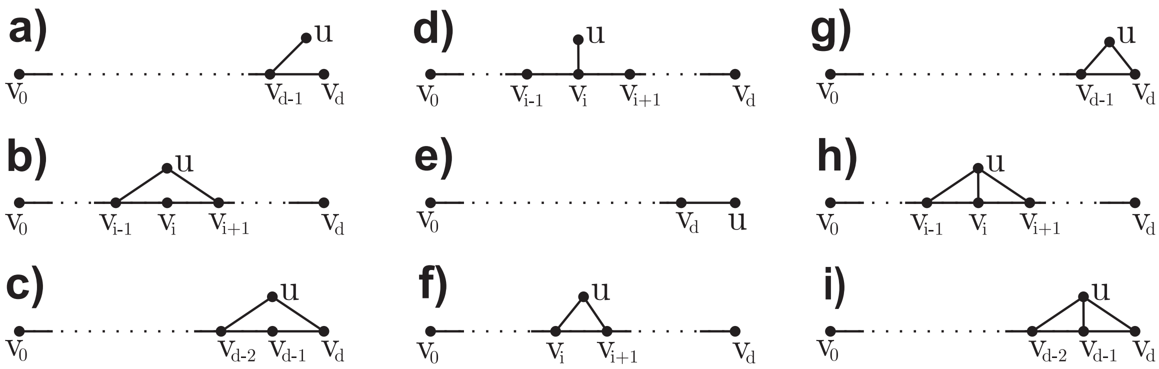

Рис. 4. К доказательству теоремы 16

$d \geqslant 4$ выполнены строгие неравенства $i_M(\widehat{G}) > i_M(P) = \psi_{d+1}$ (поскольку для каждого м. н. м. A в P найдётся такое м. н. м. $A' \in \widehat{G}$, что $A = A' \cap V(P)$, но можно указать такое м. н. м. A' в $\widehat{G}$, что $A' \cap V(P)$ не является м. н. м. в P). Отсюда и из предположения $i_M(G) = \psi_{d+1}$ следует, что G_u должен быть изоморфен одному из графов на рис. 4a–4c.

Покажем теперь, что любая вершина из $V(G) \setminus V(P)$ лежит на расстоянии 1 от P. Допустим, что это не так. Тогда в G найдётся вершина w, находящаяся на расстоянии 2 от P. Пусть u — соседняя с w вершина, находящаяся на расстоянии 1 от P. Подграф $G_{u,w}$ графа G, порождённый множеством $V(P) \cup \{u, w\}$, изоморфен одному из графов на рис. 5a–5c. Но тогда, как нетрудно показать, $i_M(G_{u,w}) > i_M(P)$, а

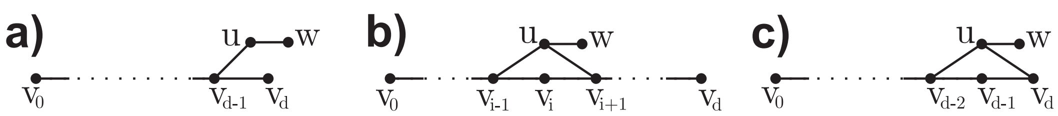

Рис. 5. К доказательству теоремы 16

значит $i_M(G) > \psi_{d+1}$ — противоречие с выбором G.

Из приведённых выше рассуждений следует, что для любой диаметральной цепи P в G и любой вершины $u \in V(G) \setminus V(P)$ подграф G_u графа G, порождённый множеством $V(P) \cup \{u\}$, изоморфен одному из графов на рис. 4a–4c. Построим множества $V_0, \ldots, V_d$ следующим образом. Во множество V_i при $1 \leqslant i \leqslant d-1$ входят те и только те вершины u из $V(G)$, для которых $\{\{v_{i-1}, u\}, \{v_{i+1}, u\}\} \subseteq E(G)$. Множество V_0 состоит из всех тех вершин $u \in V(G)$, для которых $\{v_1, u\} \in E(G)$ и $\{v_3, u\} \notin E(G)$. Множество V_d состоит из всех тех вершин $u \in V(G)$, для которых $\{v_{d-1}, u\} \in E(G)$ и $\{v_{d-3}, u\} \notin E(G)$.

Покажем, что G является квазицепным графом, и $\{V_i\}_{i=0}^{d}$ — соответствующее правильное разбиение его вершин. Отметим, что для построенных множеств V_i при каждом i, $0 \leqslant i \leqslant d$, выполнено $v_i \in V_i$. Кроме того, любая вершина $u \in V(G) \setminus V(P)$ принадлежит ровно одному из множеств V_i в силу того, что граф G_u изоморфен одному из графов на рис. 4a–4c. Поэтому множества $\{V_i\}_{i=0}^{d}$ образуют разбиение множества $V(G)$. Отметим, что если u' и u'' — различные вершины из одного и того же множества V_i, то $\{u', u''\} \notin E(G)$ (в противном случае подграф G, порождённый множеством $(P(V) \setminus \{v_i\}) \cup \{u', u''\}$, был бы изоморфен одному из графов на рис. 4g–4i, и мы получили бы $i_M(G) > \psi_{d+1}$). Следовательно, каждое из множеств V_i независимо в G.

Теперь покажем, что $\{u', u''\} \notin E(G)$ для любых вершин $u' \in V_i$ и $u'' \in V_j$ при $|i-j| \geqslant 2$. Если $2 \leqslant i+1 < j < d$, то наличие ребра $\{u', u''\}$ в G противоречило бы тому, что v_0, v_d находятся на расстоянии d. По этой же причине при $d \geqslant 6$ в G не может быть ребра $\{u', u''\}$ такого, что $u' \in V_0$, $u'' \in V_d$. Если $d \in \{4, 5\}$ и $\{u', u''\} \in E(G)$ для некоторых $u' \in V_0$, $u'' \in V_d$, то G содержит порождённый подграф, изоморфный графу на рис. 6a (при $d = 4$) или рис. 6b (при $d = 5$), из чего следует $i_M(G) > \psi_{d+1}$, что противоречит выбору G. Осталось рассмотреть

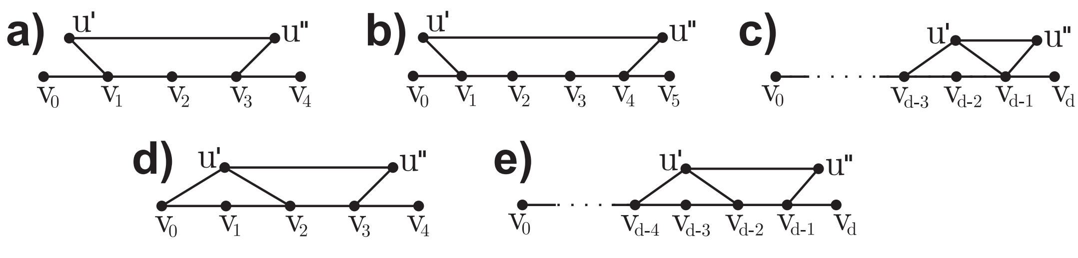

Рис. 6. К доказательству теоремы 16

случай, когда $\{u', u''\} \in E(G)$ для вершин $u' \in V_i$, $u'' \in V_d$, где $1 \leqslant i \leqslant d-2$.

При $i \leqslant d-4$ получаем противоречие с тем, что расстояние между v_0 и v_d равно d. При $i=d-2$ граф G содержал бы порождённый подграф, изоморфный графу на рис. 6c, число м. н. м. в котором строго больше ψ_{d+1}. Аналогично, при $i=d-3$ граф G содержал бы порождённый подграф, изоморфный одному из графов на рис. 6d,6e, и было выполнено строгое неравенство $i_M(G) > \psi_{d+1}$.

Осталось теперь только заметить, что $\{u', u''\} \in E(G)$ для любых u', u'', таких, что $u' \in V_i$, $u'' \in V_{i+1}$ (в противном случае в G был бы порождённый подграф, изоморфный одному из графов на рис. 7, и было бы выполнено неравенство $i_M(G) > \psi_{d+1}$). Таким образом, G обладает всеми свойствами квазицепного графа

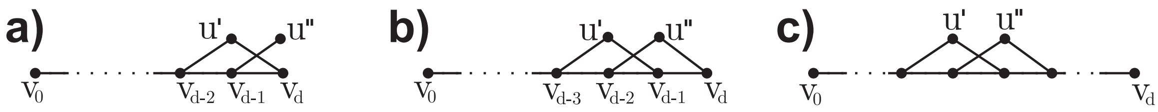

Рис. 7. К доказательству теоремы 16

с правильным разбиением $\{V_i\}_{i=0}^{d}$, и теорема доказана. $\square$

Следствие. *Пусть $d \geqslant 3$ и дерево T является $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–минимальным. Тогда $T \simeq B_{d,p,q}$ для некоторых натуральных p, q.*

Совершенно аналогично теореме 16 доказывается следующее утверждение.

***Утверждение* 15.** *Для любого графа G диаметра 2 выполнено неравенство $i_M(G) \geqslant 2$, обращающееся в равенство только на полных двудольных графах. Для любого графа G диаметра 3 справедливо неравенство $i_M(G) \geqslant 3$, причём равенство достигается только если множество $V(G)$ можно разбить на подмножества $V' \sqcup V_0 \sqcup V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$ (множество V' может быть пустым) так, что подграф, порождённый множеством $V(G) \setminus V'$ является квазицепным с правильным разбиением $\{V_i\}_{i=0}^{3}$, множество V' независимо в G, и*

$$V' \times (V_1 \cup V_2) \subset E(G),$$
$$(V' \times (V_0 \cup V_3)) \cap E(G) = \varnothing.$$

2.3. Верхние оценки числа максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра

Введём несколько обозначений для деревьев специального вида. Через $\widetilde{B}_{4,n}$ обозначим дерево, полученное из звезды $K_{1,\frac{n-1}{2}}$ подразбиением всех рёбер. Через $\widetilde{B}'_{4,n}$ обозначим дерево, полученное из звезды $K_{1,\frac{n}{2}}$ подразбиением $\frac{n-2}{2}$ рёбер. Деревья $\widetilde{B}_{4,n}$ и $\widetilde{B}'_{4,n}$ изображены на рис. 8.

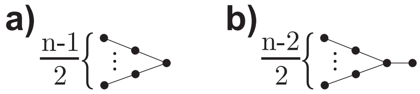

Рис. 8. Деревья $\widetilde{B}_{4,n}$ (a) и $\widetilde{B}'_{4,n}$ (b)

Через $\widetilde{B}'_{5,n}$ обозначим дерево, полученное из метлы $B_{3,\frac{n-5}{2},2}$ подразбиением всех висячих рёбер, кроме одного ребра, инцидентного вершине степени 3. Через $\widetilde{B}_{5,n,p}$ обозначим дерево, полученное из $B_{3,p,\frac{n-5-2p}{2}}$ подразбиением всех висячих рёбер. Через $\widehat{B}'_{5,n,p}$ обозначим дерево, получающееся присоединением висячей вершины к той из центральных вершин дерева $\widetilde{B}_{5,n-1,p}$, которая имеет степень $(p+1)$. Через $\widehat{B}''_{5,n,p}$ обозначим дерево, получающееся присоединением висячей вершины к каждой из центральных вершин дерева $\widetilde{B}_{5,n-2,p}$. Деревья $\widetilde{B}'_{5,n}$, $\widetilde{B}_{5,n,p}$, $\widehat{B}'_{5,n,p}$ и $\widehat{B}''_{5,n,p}$ изображены на рис. 9.

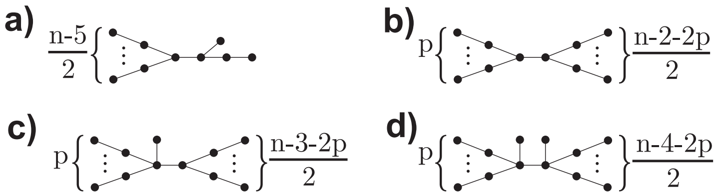

Рис. 9. Деревья $\widetilde{B}'_{5,n}$ (a), $\widetilde{B}_{5,n,p}$ (b), $\widehat{B}'_{5,n,p}$ (c) и $\widehat{B}''_{5,n,p}$ (d)

Через $\widehat{B}_{6,n,p}$ обозначим дерево, полученное из $B_{4,p,\frac{n-3-2p}{2}}$ подразбиением всех висячих рёбер. Через $\widetilde{B}'_{6,n,p}$ обозначим дерево, получающееся присоединением висячей вершины к центральной вершине дерева $\widehat{B}_{6,n-1,p}$. Через $\widehat{B}_{6,n,p,q}$ обозначим дерево, полученное присоединением q висячих вершин к центру $B_{4,p,\frac{n-3-2p-2q}{2}}$ и последующим подразбиением всех висячих рёбер. Через $\widehat{B}'_{6,n,p,q}$ обозначается дерево, полученное присоединением висячей вершины к центральной вершине дерева $\widehat{B}_{6,n-1,p,q}$. Деревья $\widehat{B}_{6,n,p,q}$, $\widehat{B}'_{6,n,p,q}$, $\widehat{B}_{6,n,p}$ и $\widetilde{B}'_{6,n,p}$ изображены на рис. 10.

Через $\widetilde{B}'_{7,n}$ обозначим дерево, полученное из $B_{5,\frac{n-7}{2},2}$ подразбиением всех висячих рёбер, кроме одного ребра, инцидентного вершине степени 3. Через $\widetilde{B}_{7,n}$ обо-

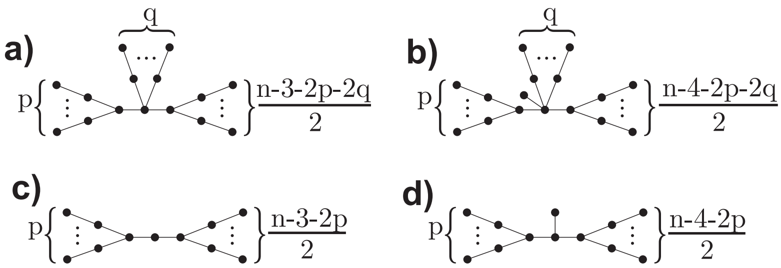

Рис. 10. Деревья $\widehat{B}_{6,n,p,q}$ (a), $\widehat{B}'_{6,n,p,q}$ (b), $\widehat{B}_{6,n,p}$ (c) и $\widetilde{B}'_{6,n,p}$ (d)

значим дерево, полученное из $B_{5,p,\frac{n-4-2p}{2}}$ подразбиением всех висячих рёбер. Через $\widehat{B}_{7,n,p,q,r}$ обозначим дерево, полученное присоединением к центральным вершинам дерева $B_{5,p,\frac{n-5-2p-2q-2r}{2}}$, смежным с вершинами степени $(p+1)$ и $\frac{n-3-2p-2q-2r}{2}$, соответственно $(q+1)$ и r висячих вершин, и последующим подразбиением всех висячих рёбер, кроме одного, инцидентного центральной вершине, смежной с вершинами степени $(p+1)$ и $(r+2)$. Деревья $\widetilde{B}'_{7,n}$, $\widetilde{B}_{7,n}$ и $\widehat{B}_{7,n,p,q,r}$ изображены на рис. 11.

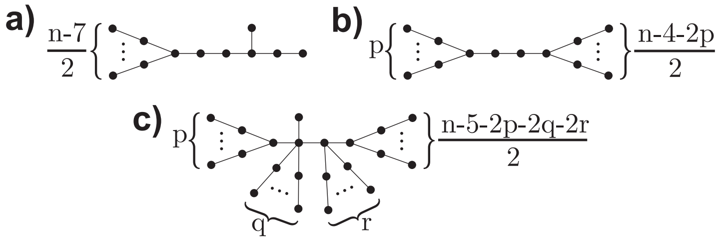

Рис. 11. Деревья $\widetilde{B}'_{7,n}$ (a), $\widetilde{B}_{7,n}$ (b) и $\widehat{B}_{7,n,p,q,r}$ (c)

Обозначим через $\widehat{B}_{8,n}$ дерево, полученное из $\widetilde{B}_{4,n-4}$ двукратным подразбиением двух висячих рёбер. Через $\widehat{B}'_{8,n}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к центру дерева $\widehat{B}_{8,n-1}$. Деревья $\widehat{B}_{8,n}$ и $\widehat{B}'_{8,n}$ изображены на рис. 12. Через $\widehat{B}_{9,n,p}$ обозначим дерево, полученное из дерева $\widetilde{B}_{5,n-4,p+1}$ двукратным подразбиением двух висячих рёбер, находящихся на противоположных концах дерева. Через $\widehat{B}'_{9,n,p}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к центральной вершине степени $(p+2)$ дерева $\widehat{B}_{9,n-1,p}$. Через $\widehat{B}''_{9,n,p}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячих вершин к каждой из центральных вершин степени дерева $\widehat{B}_{9,n-2,p}$. Деревья $\widehat{B}_{9,n,p}$, $\widehat{B}'_{9,n,p}$ и $\widehat{B}''_{9,n,p}$ изображены на рис. 12.

Через $\widetilde{B}'_{6}$ обозначим дерево, полученное из $K_{1,3}$ двукратным подразбиением двух рёбер. Через $\widetilde{B}'_{8}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к четвёртой с конца вершине цепи P_9. Через $\widetilde{B}_d$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к третьей с конца вершине цепи P_{d+1}. Де-

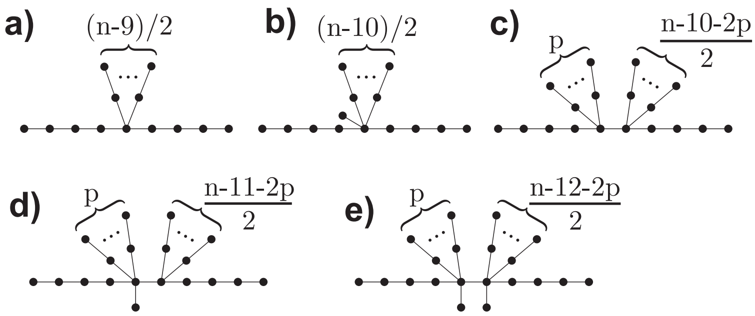

Рис. 12. Деревья $\widehat{B}_{8,n}$ (a), $\widehat{B}'_{8,n}$ (b), $\widehat{B}_{9,n,p}$ (c), $\widehat{B}'_{9,n,p}$ (d) и $\widehat{B}''_{9,n,p}$ (e)

ревья $\widetilde{B}'_6$, $\widetilde{B}'_8$ и $\widetilde{B}_d$ изображены на рис. 13.

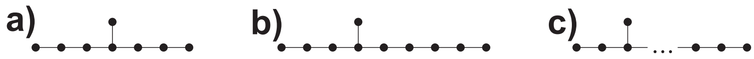

Рис. 13. Деревья $\widetilde{B}^*_6$ (a), $\widetilde{B}^*_8$ (b) и $\widetilde{B}''_n$ (c)

Через $\check{B}_{d,n}$ обозначим дерево, полученное из $B_{d-2,\frac{n-d+1}{2},1}$ подразбиением всех висячих рёбер. Через $\check{B}'_{d,n}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к той вершине дерева $\check{B}_{d,n-1}$, которая не смежна с висячими, но смежна с вершиной степени $\frac{n-d}{2}$. Деревья $\check{B}_{d,n}$ и $\check{B}'_{d,n}$ изображены на рис. 14.

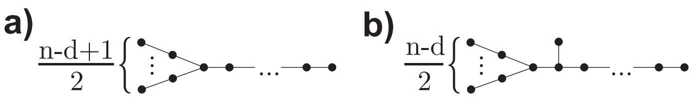

Рис. 14. Деревья $\check{B}_{d,n}$ (a) и $\check{B}'_{d,n}$ (b)

Наконец, через $\widehat{B}^*_{d,k}$ обозначим дерево, полученное присоединением висячей вершины к k-й вершине диаметральной цепи дерева дерева $\check{B}_{d,d+3}$, считая с того конца диаметральной цепи, который наиболее удалён от вершины степени 3. Деревья $\widehat{B}^*_{d,k}$ при $k=3$, $k=4$ и $k \geqslant 5$ изображены на рис. 15.

Для натуральных n, d таких, что $4 \leqslant d \leqslant n-1$, определим величину $M(n,d)$:

$$M(n,d) = \begin{cases} \psi_{d-1} + (2^{(n-d+1)/2}-1)\psi_{d-2}, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2k+1,\ k \geqslant 0, \\ \psi_{d-2} + \psi_d, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1}, & \text{при } d \geqslant 5,\ d \neq 7,\ n-d = 2k \geqslant 4, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} + 1, & \text{при } d \in \{4,7\},\ n-d = 2k \geqslant 4. \end{cases}$$

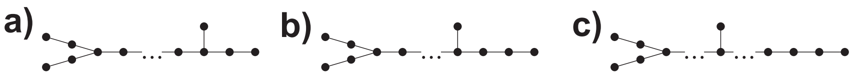

Рис. 15. Деревья $\widehat{B}^*_{d,k}$ с $k=3$ (a), $k=4$ (b) и $k\geqslant 5$ (c)

***Утверждение* 16.**

1. *При $d\geqslant 4$ и любом n, $n\geqslant d+3$, таком, что $2\nmid(n-d)$, выполнено неравенство $M(n,d)>M(n,d+1)$.*

2. *При $d\geqslant 4$ и любом n, $n\geqslant d+2$, таком, что $2\mid(n-d)$, выполнено неравенство $M(n,d)\leqslant M(n,d+1)$, причём $M(n,d)=M(n,d+1)$ только если $d=4$.*

3. *При $d\geqslant 4$ и любом n, $n\geqslant d+3$, имеет место неравенство $M(n,d)\geqslant$ $\geqslant M(n,d+2)$, причём равенство $M(n,d)=M(n,d+2)$ выполнено только если одновременно $d=5$ и n чётно.*

Доказательство.

1. Пусть $4\leqslant d\leqslant n-3$ и $2\nmid(n-d)$. Если $n=d+3$, то

$$M(n,d)-M(n,d+1)=2\psi_{d-2}-\psi_{d-1}>0.$$

Если $n\geqslant d+5$ и $d\neq 6$, то

$$\begin{aligned} M(n,d)-M(n,d+1) &= \psi_{d-1}-\psi_{d-2}+2^{(n-d-1)/2}(2\psi_{d-2}-\psi_d)\geqslant \\ &\geqslant \psi_{d-1}+7\psi_{d-2}-4\psi_d>0. \end{aligned}$$

Если $n\geqslant d+5$ и $d=6$, то $M(n,d)-M(n,d+1)=2^{(n-7)/2}>0$.

2. При $d=4$ и чётном n равенство $M(n,d)=M(n,d+1)$ легко проверяется. Пусть $5\leqslant d\leqslant n-2$ и $2\mid(n-d)$. Если $n=d+2$, то

$$M(n,d+1)-M(n,d)=\psi_{d-1}-\psi_{d-2}>0.$$

Если $d\neq 7$ и $n\geqslant d+4$, то

$$M(n,d+1)-M(n,d)=\psi_d-\psi_{d-1}>0.$$

Если $d=7$ и $n\geqslant d+4$, то $M(n,d+1)-M(n,d)=1>0$.

3. При $4 \leqslant d \leqslant n-3$ и $2 \nmid (n-d)$ имеем

$$M(n,d) - M(n,d+2) = (2^{(n-d-1)/2} - 1)(2\psi_{d-2} - \psi_d),$$

откуда следует, что $M(n,5) = M(n,7)$, и $M(n,d) > M(n,d+2)$ при $d \neq 5$.

Если $d = 4$ и n чётно, то $M(n,d) - M(n,d+2) = 1 > 0$. Пусть $5 \leqslant d \leqslant n-3$. Если $n = d+4$, то $M(n,d) - M(n,d+2) \geqslant 3\psi_{d-1} - 2\psi_d > 0$. Если $n \geqslant d+6$ и $2 \mid (n-d)$, то

$$M(n,d) - M(n,d+2) \geqslant 2^{(n-d-2)/2}(2\psi_{d-1} - \psi_{d+1}) - 1 > 0.$$

$\square$

Из утверждения 16 непосредственно вытекает следующий факт.

***Лемма* 15.** *Если $4 \leqslant d' < d'' \leqslant n-1$, то*

1. $$\operatorname*{Argmax}_{d' \leqslant d \leqslant d''} M(n,d) = \begin{cases} \{d'+1\}, & \text{при } d' \geqslant 5,\ 2 \mid (n-d'), \\ \{4,5,7\} \cap [d',d''], & \text{при } d' \leqslant 5,\ 2 \mid n, \\ \{d'\}, & \text{при } d' \geqslant 4,\ d' \neq 5,\ 2 \nmid (n-d'). \end{cases}$$
2. $$\max_{d' \leqslant d \leqslant d''} M(n,d) = \begin{cases} M(n,d'+1), & \text{при } 2 \mid (n-d'), \\ M(n,d'), & \text{при } 2 \nmid (n-d'). \end{cases}$$
3. $\max\limits_{d \geqslant d'} M(n,d) \leqslant M(n,4)$.

***Лемма* 16.** *При $n-2 = d \geqslant 5$ всякое $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево T изоморфно одному из деревьев $\widetilde{B}_6^*$, $\widetilde{B}_8^*$, $\widetilde{B}_n''$. При этом $i_M(T) = M(n,d)$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по d. При $5 \leqslant d \leqslant 8$ справедливость утверждения леммы проверяется перебором. Пусть $d \geqslant 9$ и утверждение леммы выполнено для деревьев диаметра не выше $(d-1)$. Пусть T — $(d+2,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево. Пусть v — единственная не лежащая на диаметральной цепи T вершина. Обозначим через u ту концевую вершину диаметральной цепи, которая находится от v на наибольшем расстоянии. Пусть u' — соседняя с u вершина, а u''

— вершина, находящаяся от u на расстоянии 2. Тогда, пользуясь предположением индукции, можно оценить $i_M(T)$:

$$\begin{aligned} i_M(T) &= i_M(T \setminus \{u, u'\}) + i_M(T \setminus \{u, u', u''\}) \leqslant \\ &\leqslant M(n-2, d-2) + M(n-3, d-3) = \\ &= M(n, d), \end{aligned}$$

причём равенство $i_M(T) = M(n, d)$ возможно только если деревья $T \setminus \{u, u'\}$ и $T \setminus \{u, u', u''\}$ изоморфны каким-либо из деревьев $\widetilde{B}^*_6$, $\widetilde{B}^*_8$, $\widetilde{B}''_{n-2}$, $\widetilde{B}''_{n-3}$. Но тогда и само дерево T изоморфно дереву $\widetilde{B}''_n$. $\square$

***Лемма* 17.** *Всякое $(n, 5)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево изоморфно одному из деревьев $\widetilde{B}'_{5,n}$, $\widetilde{B}_{5,n,p}$ (при некотором p).*

Доказательство. Пусть T — произвольное $(n, 5)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево. Если дерево T изоморфно одному из деревьев $\widetilde{B}'_{5,n}$ или $\widetilde{B}_{5,n,p}$, то, как легко проверить, $i_M(T) = M(n, 5)$. Допустим, T не изоморфно ни одному из деревьев $\widetilde{B}'_{5,n}$, $\widetilde{B}_{5,n,p}$. Тогда из леммы 14 следует, что возможны только следующие случаи:

1. T имеет вид $\widehat{B}'_{5,n,p}$, где $n \geqslant 9$ и $p \geqslant 2$. Тогда

$$i_M(T) = 2^{(n-5)/2}(2 + 2^{1-p}) < 3 \cdot 2^{(n-5)/2} = M(n, 5).$$

2. T имеет вид $\widehat{B}''_{5,n,p}$, где $n \geqslant 8$. Тогда

$$i_M(T) = 2^{(n-4)/2} + 2^p + 2^{(n-2p-4)/2} \leqslant 2 + 3 \cdot 2^{(n-6)/2} < 1 + 4 \cdot 2^{(n-6)/2} = M(n, 5).$$

Итак, в обоих рассмотренных случаях мы получаем противоречие с $(n, 5)_{\text{м.н.м.}}$–максимальностью T, что завершает доказательство леммы. $\square$

Очевидно, что всякое дерево диаметра 1 или 2 содержит два м. н. м., а всякое дерево диаметра 3 содержит три м. н. м. При $d \geqslant 4$ полное описание $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальных деревьев даётся следующей теоремой.

***Теорема* 17.** *При $4 \leqslant d \leqslant n-2$ для всякого $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимального дерева T выполнено равенство $i_M(T) = M(n,d)$, и при этом само дерево T изоморфно одному из деревьев, приведённых в таблице:*

d	$(n-d)$	экстремальные деревья
4	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}_{4,n}$
4	$2k$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}'_{4,n}$
5	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}_{5,n,p}$ ($1 \leqslant p \leqslant \frac{n-4}{2}$)
5	$2k$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}'_{5,n}$
6	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\check{B}_{6,n}$
6	2	$\widetilde{B}^*_6$, $\widetilde{B}''_8$
6	$2k$ ($k \geqslant 2$)	$\widetilde{B}'_{6,n,p}$ ($1 \leqslant p \leqslant \frac{n-6}{2}$)
7	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}_{7,n}$ ($1 \leqslant p \leqslant \frac{n-6}{2}$)
7	$2k$ ($k \geqslant 1$)	$\widetilde{B}'_{7,n}$
8	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\check{B}_{8,n}$
8	2	$\widetilde{B}^*_8$, $\widetilde{B}''_{10}$
8	$2k$ ($k \geqslant 2$)	$\check{B}'_{8,n}$
$\geqslant 9$	$2k+1$ ($k \geqslant 1$)	$\check{B}_{d,n}$
$\geqslant 9$	2	$\widetilde{B}''_n$
$\geqslant 9$	$2k$ ($k \geqslant 2$)	$\check{B}'_{d,n}$

Доказательство. Справедливость теоремы при $d = 4$ непосредственно следует из леммы 14, а при $d = 5$ обеспечивается леммой 17. Кроме того, при $n = d+2$ утверждение теоремы следует из леммы 16.

Пусть $d \geqslant 6$, $n \geqslant d+3$, и пусть утверждение теоремы выполнено для всех пар (n'',d) таких, что $n'' < n$, а также для всех пар (n',d') таких, что $d' \leqslant d-1$. Докажем, что тогда утверждение теоремы справедливо и для пары (n,d). Пусть T — произвольное $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальное дерево, и P — произвольная диаметральная цепь в T. Покажем для любой вершины v, не лежащей на цепи P, минимальное из расстояний от v до вершин P не превосходит 2. Предположим противное и покажем, что в этом предположении выполнено строгое неравенство $M(n,d) - i_M(T) > 0$, что противоречит выбору T. Из леммы 14 следует, что возможны лишь следующие случаи:

A. Дерево T имеет вид, указанный на рис. 16а, где $\operatorname{diam}(T') = d$ и $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-d-2}{2}$. В этом случае $M(n,d) - i_M(T) \geqslant D_1(n,d)$, где

$$D_1(n,d) = M(n,d) - M(n-2,d) - M(n-2t-1,d) \cdot 2^{t-1}.$$

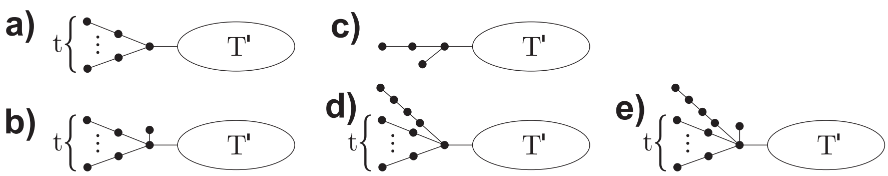

Рис. 16. К доказательству теоремы 17

Рассмотрим несколько подслучаев:

A1. $n = d+4$. Тогда $t = 1$ и $D_1(n,d) \geqslant 4\psi_{d-1} - \psi_{d-2} - \psi_d - \psi_{d+1} > 0$.

A2. $n = d+2k$, где $k \geqslant 3$. Тогда

$$\begin{aligned} D_1(n,d) &= 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} - 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1}+\psi_{d-2}) - 2^{t-1}(\psi_{d-1}-\psi_{d-2}) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} - 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1}+\psi_{d-2}) - \\ &-2^{(n-d-4)/2}(\psi_{d-1}-\psi_{d-2}) = 2^{(n-d-4)/2}(\psi_{d-1}-\psi_{d-2}) > 0. \end{aligned}$$

A3. $n = d+2k+1$, где $k \geqslant 2$, и $t = \frac{n-d-3}{2}$. Тогда

$$D_1(n,d) = 2^{(n-d-5)/2}(3\psi_{d-2} - \psi_d) > 0.$$

A4. $n = d+2k+1$, где $k \geqslant 3$, и $t \leqslant \frac{n-d-5}{2}$. Тогда

$$D_1(n,d) \geqslant 2^{(n-d-7)/2}(8\psi_{d-2} - 4\psi_{d-1} - 1) > 0.$$

B. Дерево T имеет вид, указанный на рис. 16b, где $\operatorname{diam}(T') = d$ и $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-d-3}{2}$. В этом случае $M(n,d) - i_M(T) \geqslant D_2(n,d)$, где

$$D_2(n,d) = M(n,d) - M(n-2,d) - M(n-2t-2,d) \cdot 2^{t-1}.$$

Рассмотрим несколько подслучаев:

B1. $n = d + 2k + 1$, где $k \geqslant 2$. Тогда

$$\begin{aligned} D_2(n,d) &= 2^{(n-d-3)/2}\psi_{d-2} - 2^{t-1}(\psi_{d-1} - \psi_{d-2}) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d-3)/2}\psi_{d-2} - 2^{(n-d-5)/2}(\psi_{d-1} - \psi_{d-2}) = \\ &= 2^{(n-d-5)/2}(3\psi_{d-2} - \psi_{d-1}) > 0. \end{aligned}$$

B2. $n = d + 2k$, где $k \geqslant 3$ и $t = \frac{n-d-4}{2}$. Тогда

$$D_2(n,d) = 2^{(n-d-6)/2}(4\psi_{d-1} - \psi_d - \psi_{d-2}) > 0.$$

B3. $n = d + 2k$, где $k \geqslant 3$ и $t \leqslant \frac{n-d-6}{2}$. Тогда

$$D_2(n,d) > 2^{(n-d-4)/2}(\psi_{d-1} - 1) > 0.$$

Итак, в любом случае наличие вершин, отстоящих от цепи P на расстояние, большее двух, вступает в противоречие с $(n,d)_{\text{м.н.м.}}$–максимальностью T. Отсюда и из леммы 14 следует, что всякая вершина в T удалена от диаметральной цепи на расстояние не больше 2, и любая вершина T смежна не более чем с одним листом.

Рассмотрим отдельно случаи, когда дерево T имеет диаметр 6 и 7.

C. $\operatorname{diam}(T) = 6$. Допустим, дерево T не изоморфно ни одному из деревьев $\check{B}_{6,n}$, $\widetilde{B}'_{6,n,p}$. Тогда возможны следующие случаи:

C1. T имеет вид, изображённый на рис. 16b, где $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-6}{2}$ и $\operatorname{diam}(T') \geqslant 3$. Если в T' всего четыре вершины, то

$$i_M(T) = 2 + 3 \cdot 2^{(n-6)/2} < M(n,6).$$

Пусть в T' по крайней мере 5 вершин. Тогда из леммы 15 и предположения индукции следует, что

$$M(n,6) - i_M(T) \geqslant M(n,6) - \max_{d \in \{5,6\}} M(n-2,d) - 2^{t-1} M(n-2t-2,4).$$

Если n чётно, то $\max_{d\in\{5,6\}} M(n-2,d) = M(n-2,5)$ и

$$\begin{aligned} M(n,6) - i_M(T) &\geqslant M(n,6) - M(n-2,5) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-8)/2} - 1 > 0. \end{aligned}$$

Если n нечётно, то $\max_{d\in\{5,6\}} M(n-2,d) = M(n-2,6)$ и

$$\begin{aligned} M(n,6) - i_M(T) &\geqslant M(n,6) - M(n-2,6) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4) = \\ &= 2^{(n-7)/2} > 0. \end{aligned}$$

C2. T либо изоморфно одному из деревьев $\widehat{B}_{6,n,p,q}$, $\widehat{B}'_{6,n,p,q}$, либо изоморфно дереву $\widehat{B}_{6,n,p}$ и при этом $2 \leqslant p \leqslant \frac{n-7}{2}$. Из приведённой ниже таблицы видно, что во всех этих случаях $i_M(T) < M(n,6)$.

T	$i_M(T)$	нижняя оценка для $(M(n,6) - i_M(T))$
$\widehat{B}_{6,n,p,q}$	$2^{(n-3)/2} + 2^p + 2^{(n-3-2p-2q)/2} - 1$	$2^{(n-7)/2}$
$\widehat{B}'_{6,n,p,q}$	$2^{(n-4)/2} + 2^{(n-4-2q)/2}$	$2^{(n-6)/2}$
$\widehat{B}_{6,n,p}$	$2^{(n-3)/2} + 2^p + 2^{(n-3-2p)/2} - 1$	$2^{(n-7)/2} - 2$

D. $\mathrm{diam}(T) = 7$. Возможны следующие подслучаи:

D1. T имеет вид, изображённый на рис. 16b, где $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-7}{2}$ и $\mathrm{diam}(T') \geqslant 4$. Тогда из леммы 15 и предположения индукции следует, что

$$M(n,7) - i_M(T) \geqslant M(n,7) - \max_{d\in\{6,7\}} M(n-2,d) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4).$$

Если n чётно, то $\max_{d\in\{6,7\}} M(n-2,d) = M(n-2,7)$ и

$$M(n,7) - i_M(T) \geqslant M(n,7) - M(n-2,7) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4) \geqslant 3 \cdot 2^{(n-10)/2} > 0.$$

Если n нечётно, то $\max_{d\in\{6,7\}} M(n-2,d) = M(n-2,6)$ и

$$M(n,7) - i_M(T) \geqslant M(n,7) - M(n-2,6) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4) = 0,$$

причём из леммы 15 и предположения индукции следует, что равенство $M(n,7) - i_M(T) = M(n,7) - M(n-2,6) - 2^{t-1}M(n-2t-2,4)$ возможно только если $t = 1$ и дерево T' имеет вид $\widetilde{B}_{4,n'}$, а это возможно только если T изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n}$.

D2. T имеет вид, изображённый на рис. 16а, где $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-6}{2}$. Если n чётно, то из предположения индукции и леммы 15 получаем

$$i_M(T) \leqslant M(n-2,5) + 2^{t-1}M(n-2t-1,4) = M(n,7),$$

причём равенство $i_M(T) = M(n,7)$ возможно только если поддерево T' дерева T изоморфно дереву $\widetilde{B}_{4,n'}$, и значит само дерево T изоморфно дереву $\widetilde{B}_{7,n}$.

Допустим теперь, что n нечётно, и T не изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n}$, а также не может быть представлено в виде, описанном в п. D1. Тогда T изоморфно дереву $\widehat{B}_{7,n,p,q,r}$ при некоторых $q, r \geqslant 0$, и выполнены соотношения

$$i_M(T) = 2^{(n-5)/2} + 2^{p+q} + 2^{(n-2q-5)/2} \leqslant 5 \cdot 2^{(n-7)/2} < M(n,7).$$

Все случаи, когда $d = \operatorname{diam}(T) \leqslant 7$, разобраны выше, и на протяжении оставшейся части доказательства теоремы мы будем считать, что $d \geqslant 8$. Зафиксируем в дереве T какую-нибудь диаметральную цепь P. Обозначим через w, w', u, u', u'' идущие по порядку вершины P, где w — концевая вершина P. При этом будем считать, что если $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$, $\tilde{u}$, $\tilde{u}'$, $\tilde{u}''$ — вершины P, идущие по порядку начиная с концевой вершины $\tilde{w}$, противоположной w, то набор степеней

$$(\deg w,\ \deg w',\ \deg u,\ \deg u',\ \deg u'')$$

лексикографически не меньше набора степеней $(\deg \tilde{w},\ \deg \tilde{w}',\ \deg \tilde{u},\ \deg \tilde{u}',\ \deg \tilde{u}'')$. Рассмотрим несколько случаев:

1. К вершине u в T примыкают t цепей на двух вершинах, где $t \geqslant 2$, и не примыкает ни одного листа. В этом случае дерево T имеет вид, указанный на рис. 16а, где $\operatorname{diam}(T') \geqslant d-3$. Имеем

$$i_M(T) \leqslant M(n-2,d) + 2^{t-1} \cdot \max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-1,d'). \tag{23}$$

1.1. Если $2 \nmid (n-d)$, то из леммы 15 следует, что

$$\max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-1,d') \leqslant M(n-2t-1,d-3).$$

Тогда (23) влечёт

$$\begin{aligned}
M(n,d) \quad -i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 2^{t-1}\cdot M(n-2t-1,d-3) = \\
&= 2^{(n-d-1)/2}\psi_{d-2} - 2^{(n-d+1)}\psi_{d-5} - 2^{t-1}(\psi_{d-4}-\psi_{d-5}) \geqslant \\
&\geqslant 2^{(n-d-1)/2}\psi_{d-2} - 2^{(n-d+1)/2}\psi_{d-5} - 2^{(n-d-1)/2}(\psi_{d-4}-\psi_{d-5}) = 0,
\end{aligned}$$

причём равенство $i_M(T) = M(n,d)$ имеет место только в случае $t = \frac{n-d+1}{2}$, то есть только если дерево T имеет вид $\check{B}_{d,n}$.

1.2. Если $2 \mid (n-d)$, то из леммы 15 следует, что

$$\max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-1,d') \leqslant M(n-2t-1,d-2).$$

Тогда возможны две ситуации.

1.2.1. $n \geqslant d+6$. Тогда

$$\begin{aligned}
M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 2^{t-1}\cdot M(n-2t-1,d-2) = \\
&= (2^{(n-d-2)/2} - 2^{t-1})(\psi_{d-3}-\psi_{d-4}) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

причём равенство $i_M(T) = M(n,d)$ возможно только если $t = \frac{n-d}{2}$ и $\operatorname{diam}(T') = d-2$. Но тогда дерево T имеет вид $\check{B}'_{d,n}$.

1.2.2. $n = d+4$. Тогда дерево T имеет вид $\widehat{B}^*_{d,k}$ при $k \geqslant 3$. Если T имеет вид $\widehat{B}^*_{d,3}$, то

$$M(n,d) - i_M(T) = 4\psi_{d-1} - 2(\psi_d + \psi_{d-5}) - \psi_{d-3} > 0.$$

Если T имеет вид $\widehat{B}^*_{d,4}$, то

$$M(n,d) - i_M(T) = 2\psi_{d-1} - 4\psi_{d-4} > 0.$$

Если же T имеет вид $\widehat{B}^*_{d,k}$, $k \geqslant 5$, то при $8 \leqslant d \leqslant 10$ утверждение теоремы проверяется перебором, а при $d \geqslant 11$ из предположения индукции следует, что

$$M(n,d) - i_M(T) \geqslant M(n,d) - M(n-2,d-2) - M(n-3,d-3) = 0,$$

причём $i_M(T) = M(n,d)$ только если T имеет вид $\widetilde{B}'_{4,n}$.

2. К вершине u в T примыкают t, $t \geqslant 2$, цепей на двух вершинах, и ровно один лист. В этом случае дерево T имеет вид, указанный на рис. 16b, где $\operatorname{diam}(T') \geqslant d-3$. Имеем

$$i_M(T) \leqslant M(n-2,d) + 2^{t-1} \cdot \max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-2,d'). \tag{24}$$

2.1. Если $2 \nmid (n-d)$, то из леммы 15 следует, что

$$\max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-1,d') \leqslant M(n-2t-2,d-2).$$

Тогда (24) влечёт

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 2^{t-1} \cdot M(n-2t-2,d-2) = \\ &= 2^{(n-d-1)/2}(\psi_{d-2} - \psi_{d-4}) - 2^{t-1}(\psi_{d-3} - \psi_{d-4}) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d-1)/2}(\psi_{d-2} - \psi_{d-4}) - 2^{(n-d-3)/2}(\psi_{d-3} - \psi_{d-4}) = \\ &= 2^{(n-d-3)/2}(2\psi_{d-2} - \psi_{d-1}) > 0. \end{aligned}$$

2.2. Если $2 \mid (n-d)$, то из леммы 15 следует, что

$$\max_{d' \geqslant d-3} M(n-2t-2,d') \leqslant M(n-2t-2,d-3).$$

Тогда (24) влечёт

$$\begin{aligned} M(n,d) \ &-i_M(T) \geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 2^{t-1} \cdot M(n-2t-2,d-3) = \\ &= 2^{(n-d-2)/2}\psi_{d-1} - 2^{t-1}(\psi_{d-4} - \psi_{d-5}) - 2^{(n-d)/2}\psi_{d-5} \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d-2)/2}\psi_{d-1} - 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-4} - \psi_{d-5}) - 2^{(n-d)/2}\psi_{d-5} = 0, \end{aligned}$$

причём для равенства $i_M(T) = M(n,d)$ необходимо, чтобы $t = \frac{n-d}{2}$. Но при $t = \frac{n-d}{2}$ имеем

$$M(n,d) - i_M(T) = 2^{(n-d)/2}(\psi_{d-1} - \psi_{d-2}) - \psi_{d-3} \geqslant 4(\psi_{d-1} - \psi_{d-2}) - \psi_{d-3} > 0.$$

3. К вершине u в T примыкает одна цепь на двух вершинах, и один лист. В этом случае дерево T имеет вид, указанный на рис. 16c, где $\operatorname{diam}(T') \geqslant d-3$. В этом случае, также как и в предыдущих, применяем предположение индукции и лемму 15:

3.1. Если $2 \mid (n-d)$, то

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d-1) - M(n-4,d-3) = \\ &= (2^{(n-d)/2}-1)(\psi_{d-4}-\psi_{d-5}) - \psi_{d-2} + \psi_{d-3} \geqslant \\ &\geqslant 3(\psi_{d-4}-\psi_{d-5}) - \psi_{d-2} + \psi_{d-3} > 0. \end{aligned}$$

3.2. Если $2 \nmid (n-d)$, то

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d-1) - M(n-4,d-2) \geqslant \\ &\geqslant (2^{(n-d-1)/2}-1)(\psi_{d-2}-\psi_{d-4}) + \psi_{d-1} - \psi_{d-3} - 1 > 0. \end{aligned}$$

4. Допустим теперь, что к вершине u примыкает одна цепь на двух вершинах и не примыкает ни одного листа (то есть $\deg u = 2$). Рассмотрим вершину u', соседнюю с u и находящуюся на расстоянии 3 от конца диаметральной цепи P. Возможны четыре случая:

4.1. К вершине u' примыкает хотя бы одна цепь на двух вершинах. Тогда $M(n,d) - - i_M(T) \geqslant D_3(n,d)$, где

$$D_3(n,d) = M(n,d) - M(n-2,d-1) - M(n-3,d-1).$$

4.1.1. Если $n = d+3$, то $D_3(n,d) = 3\psi_{d-2} - \psi_{d-3} - \psi_d > 0$.

4.1.2. Если $n = d+4$, то при $d \geqslant 12$ выполнены соотношения

$$D_3(n,d) = 2\psi_{d-4} - \psi_{d-3} - \psi_{d-5} > 0,$$

а при $8 \leqslant d \leqslant 11$ неравенство $i_M(T) < M(n,d)$ проверяется перебором.

4.1.3. Если $2 \nmid (n-d)$ и $n \geqslant d+5$, то

$$D_3(n,d) \geqslant (2^{(n-d-1)/2}-1)(\psi_{d-2}-\psi_{d-3}) + \psi_{d-1} - \psi_{d-2} - 1 > 0.$$

4.1.4. Если $2 \mid (n-d)$ и $n \geqslant d+6$, то

$$\begin{aligned} D_3(n,d) &= 2^{(n-d-2)/2}(2\psi_{d-4}-\psi_{d-2}) - \psi_{d-2} + \psi_{d-3} - 1 \geqslant \\ &\geqslant 4(2\psi_{d-4}-\psi_{d-2}) - \psi_{d-2} + \psi_{d-3} - 1 > 0. \end{aligned}$$

4.2. К вершине u' не примыкает ни одной цепи на двух вершинах, но примыкает один лист. В этом случае из утверждения 13 и предположения индукции следует, что $i_M(T) \leqslant 2M(n-3,d-2) < M(n,d)$.

4.3. Степень вершины u' равна 2. В этом случае рассмотрим вершину u'' — соседнюю с u', находящуюся на расстоянии 4 от конца цепи P. Рассмотрим вначале ситуацию, когда к u'' не примыкает ни одной цепи на двух вершинах. Если $d \notin \{9, 10\}$, или $2 \nmid (n-d)$, то утверждение теоремы сразу следует из предположения индукции и равенства

$$M(n-2, d-2) + M(n-3, d-3) = M(n, d).$$

Случаи $d = 9$, $2 \nmid n$ и $d = 10$, $2 \mid n$ необходимо рассмотреть отдельно из-за «нестандартного» поведения функции $M(n,d)$ при $d = 7$, $2 \nmid n$:

4.3.1. $d = 9$ и $2 \nmid n$. Если дерево $T \setminus \{w, w'\}$ не изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n-2}$ и одновременно дерево $T \setminus \{w, w', u\}$ не изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{6,n-3,p}$, то из предположения индукции следует, что

$$i_M(T) \leqslant M(n-2, 7) + M(n-3, 6) - 2 < M(n, 7).$$

Если же дерево $T \setminus \{w, w'\}$ изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n-2}$, или дерево $T \setminus \{w, w', u\}$ изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{6,n-3,p}$, то дерево T попадает под один из уже разобранных случаев 1, 3, 4.2.

4.3.2 $d = 10$ и $2 \mid n$. Если дерево $T \setminus \{w, w'\}$ не изоморфно дереву $\check{B}'_{d,n-2}$ и одновременно дерево $T \setminus \{w, w', u\}$ не изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n-3}$, то из предположения индукции следует, что

$$i_M(T) \leqslant M(n-2, 8) + M(n-3, 7) - 2 < M(n, 7).$$

Если дерево $T \setminus \{w, w'\}$ изоморфно дереву $\check{B}'_{d,n-2}$, то и T имеет вид $\widetilde{B}'_{7,n}$. Если дерево $T \setminus \{w, w', u\}$ изоморфно дереву $\widetilde{B}'_{7,n-3}$, то дерево T попадает под один из уже разобранных случаев 1, 3, 4.2.

4.4. Остается теперь только рассмотреть случай, когда степень вершины u' равна 2, а к вершине u'' примыкает хотя бы одна цепь на двух вершинах. Возможны четыре подслучая:

4.4.1. Дерево T имеет диаметр 8. Тогда $n \geqslant 11$ и T имеет вид $\widehat{B}_{8,n}$ или $\widehat{B}'_{8,n}$. Из приведённой ниже таблицы видно, что в обоих случаях $i_M(T) < M(n, 8)$.

T	$i_M(T)$	$M(n,8) - i_M(T)$
$\widehat{B}_{8,n}$	$9 \cdot 2^{(n-9)/2} + 3$	$2^{(n-9)/2} - 1$
$\widehat{B}'_{8,n}$	$9 \cdot 2^{(n-10)/2} + 4$	$5 \cdot 2^{(n-10)/2} - 4$

4.4.2. Дерево T имеет диаметр 9. Тогда $n \geqslant 14$ и T имеет вид $\widehat{B}_{9,n,p}$, $\widehat{B}'_{9,n,p}$ или $\widehat{B}''_{9,n,p}$. Из приведённой ниже таблицы видно, что во всех трёх случаях $i_M(T) < M(n,9)$.

T	$i_M(T)$	нижняя оценка для $(M(n,9) - i_M(T))$
$\widehat{B}_{9,n,p}$	$9 \cdot 2^{(n-10)/2} + 3(2^p + 2^{(n-10-2p)/2}) + 1$	$7 \cdot 2^{(n-12)/2} - 5$
$\widehat{B}'_{9,n,p}$	$9 \cdot 2^{(n-11)/2} + 3 \cdot 2^p + 6 \cdot 2^{(n-11-2p)/2}$	$3 \cdot 2^{(n-9)/2} - 6$
$\widehat{B}''_{9,n,p}$	$9 \cdot 2^{(n-12)/2} + 6(2^p + 2^{(n-12-2p)/2})$	$2^{(n-4)/2} - 10$

4.4.3. $d \geqslant 10$ и T имеет вид, указанный на рис. 16d. Тогда, если $2 \mid (n-d)$ и $n \geqslant d+6$, то

$$\begin{aligned}
M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 3 \cdot 2^{t-1} \cdot M(n-2t-5, d-4) = \\
&= 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1} - 3\psi_{d-6}) - 3 \cdot 2^{t-1}(\psi_{d-5} - \psi_{d-6}) \geqslant \\
&\geqslant 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1} - 3\psi_{d-6}) - 3 \cdot 2^{(n-d-4)/2}(\psi_{d-5} - \psi_{d-6}) = \\
&= 2^{(n-d-4)/2}(2\psi_{d-4} - \psi_{d-3}) > 0.
\end{aligned}$$

Если $n = d+4$, то $t = 1$ и

$$\begin{aligned}
M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(d+4,d) - M(d+2,d) - 3M(d-3,d-4) = \\
&= 4\psi_{d-1} - 2\psi_d - 2\psi_{d-3} > 0.
\end{aligned}$$

Если $2 \nmid (n-d)$, то

$$\begin{aligned}
M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 3 \cdot 2^{t-1} \cdot M(n-2t-5, d-5) = \\
&= 2^{(n-d-1)/2}(\psi_{d-2} - 3\psi_{d-7}) - 3 \cdot 2^{t-1}(\psi_{d-6} - \psi_{d-7}) \geqslant \\
&\geqslant 2^{(n-d-1)/2}(\psi_{d-2} - 3\psi_{d-7}) - 3 \cdot 2^{(n-d-3)/2}(\psi_{d-6} - \psi_{d-7}) = \\
&= 2^{(n-d-3)/2}(2\psi_{d-2} - 3\psi_{d-4}) > 0.
\end{aligned}$$

4.4.4. $d \geqslant 10$ и T имеет вид, указанный на рис. 16e. Тогда, если $2 \mid (n-d)$ и

$n \geqslant d+6$, то

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 3\cdot 2^{t-1}\cdot M(n-2t-6,d-5) = \\ &= 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1} - 3\psi_{d-7}) - 3\cdot 2^{t-1}(\psi_{d-6} - \psi_{d-7}) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d-2)/2}(\psi_{d-1} - 3\psi_{d-7}) - 3\cdot 2^{(n-d-4)/2}(\psi_{d-6} - \psi_{d-7}) = \\ &= 2^{(n-d-4)/2}(2\psi_{d-3} - \psi_{d-4}) > 0. \end{aligned}$$

Если $n = d+4$, то $t = 1$ и

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(d+4,d) - M(d+2,d) - 3M(d-4,d-5) = \\ &= \psi_{d-1} + 2\psi_{d-3} - 2\psi_{d-2} > 0. \end{aligned}$$

Если $2 \nmid (n-d)$, то

$$\begin{aligned} M(n,d) - i_M(T) &\geqslant M(n,d) - M(n-2,d) - 3\cdot 2^{t-1}\cdot M(n-2t-6,d-4) = \\ &= 2^{(n-d-3)/2}(2\psi_{d-2} - 3\psi_{d-6}) - 3\cdot 2^{t-1}(\psi_{d-5} - \psi_{d-6}) \geqslant \\ &\geqslant 2^{(n-d-3)/2}(2\psi_{d-2} - 3\psi_{d-6}) - 3\cdot 2^{(n-d-5)/2}(\psi_{d-5} - \psi_{d-6}) = \\ &= 2^{(n-d-5)/2}(4\psi_{d-2} - 3\psi_{d-3}) > 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Глава 3. Оценки числа независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости

Исследуются соотношения между размером максимального независимого множества и числом независимых множеств в различных классах графов.

3.1. Верхняя оценка числа независимых множеств в классе всех графов с заданным числом независимости

Пусть $n, \alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant n$. Через $i(n, \alpha)$ обозначим максимум числа независимых множеств среди всех графов на n вершинах с числом независимости α:

$$i(n, \alpha) = \max_{\substack{n(G)=n,\\ \alpha(G)=\alpha}} i(G). \tag{25}$$

Напомним, что через $UK_{n,\alpha}$ обозначается объединение $(\alpha \cdot (\lfloor n/\alpha \rfloor + 1) - n)$ клик размера $\lfloor n/\alpha \rfloor$ и $(n - \alpha \cdot \lfloor n/\alpha \rfloor)$ клик размера $\lceil n/\alpha \rceil$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

***Утверждение* 17.** *При $\alpha < n$ выполнены неравенства:*

1. $i(n, \alpha) < i(n, \alpha + 1)$,
2. $i(n - 1, \alpha) < i(n, \alpha)$.

Доказательство.

1. Пусть G — такой граф, что $n(G) = n, \alpha(G) = \alpha$ и $i(G) = i(n, \alpha)$. Тогда G обладает следующим свойством: любой граф G', получаемый из G удалением одного ребра, имеет параметры $n(G') = n$, $\alpha(G') = \alpha + 1$. Имеем

$$i(n, \alpha + 1) \geqslant i(G') > i(G) = i(n, \alpha).$$

2. Пусть G — такой граф, что $n(G) = n - 1, \alpha(G) = \alpha$ и $i(G) = i(n - 1, \alpha)$. Добавив к G вершину $v \notin V(G)$ и все рёбра $\{v\} \times V(G)$, получим граф G' такой, что

$n(G') = n$, $\alpha(G') = \alpha$. Получим

$$i(n, \alpha) \geqslant i(G') > i(G) = i(n-1, \alpha).$$

$\square$

Для $n, \alpha \in \mathbb{N}$ положим

$$m(n, \alpha) = (\lceil n/\alpha \rceil + 1)^{n - \alpha \cdot \lfloor n/\alpha \rfloor} \cdot (\lfloor n/\alpha \rfloor + 1)^{\alpha \cdot (\lfloor n/\alpha \rfloor + 1) - n}.$$

Нетрудно проверить, что $i(UK_{n,\alpha}) = m(n, \alpha)$.

***Утверждение* 18.** *При $1 < \alpha < n$ выполнены неравенства*

$$2^{\alpha-1} \leqslant m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) = m(n, \alpha) - m(n-1, \alpha).$$

Доказательство. Неравенство $m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) \geqslant 2^{\alpha-1}$ вытекает из того, что $m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1)$ суть произведение $\alpha - 1$ сомножителей, каждый из которых не меньше 2. Докажем равенство

$$m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) = m(n, \alpha) - m(n-1, \alpha).$$

Рассмотрим вначале случай, когда $n = \alpha \cdot t$, $t \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned} m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) &= m(n - t, \alpha - 1) = (t+1)^{\alpha-1} = \\ &= (t+1)^{\alpha} - (t+1)^{\alpha-1} t = \\ &= m(n, \alpha) - m(n-1, \alpha). \end{aligned}$$

Пусть теперь $n = \alpha \cdot t + s$, где $t, s \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant s < \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) &= m(n - t - 1, \alpha - 1) = (t+2)^{s-1}(t+1)^{\alpha-s} = \\ &= (t+2)^{s}(t+1)^{\alpha-s} - (t+2)^{s-1}(t+1)^{\alpha-s+1} = \\ &= m(n, \alpha) - m(n-1, \alpha). \end{aligned}$$

$\square$

***Теорема* 18.** *Для любых n, α выполнено равенство*

$$i(n, \alpha) = m(n, \alpha), \tag{26}$$

причём максимум в (25) достигается на графах, изоморфных $UK_{n,\alpha}$, и только на них.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Если $n = 1$, то утверждение теоремы выполнено. Пусть $n > 1$ и для всех $n' < n$ утверждение теоремы выполняется. В случае, если $\alpha = 1$ или $\alpha = n$, утверждение теоремы выполняется. Далее считаем $1 < \alpha < n$. Сразу отметим, что $i(n,\alpha) \geqslant m(n,\alpha)$, поскольку $i(UK_{n,\alpha}) = m(n,\alpha)$. Пусть G — граф, для которого $n(G) = n$, $\alpha(G) = \alpha$, $i(G) = i(n,\alpha)$. Рассмотрим два случая.

Допустим, максимальная степень вершин в G не превосходит $(\lceil n/\alpha \rceil - 2)$. Независимым будет всякое множество вершин $\{v_1, \ldots, v_t\} \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условиям

$$v_j \in V(G) \setminus (\bigcup_{j'<j} (\{v_{j'}\} \cup \partial v_{j'})).$$

Мощность наибольшего такого множества будет не меньше $\frac{n}{\lceil n/\alpha \rceil - 1} > \alpha$, что противоречит равенству $\alpha(G) = \alpha$.

Пусть теперь максимальная степень вершин в G равна d, $d \geqslant \lceil n/\alpha \rceil - 1$. Разложим G по произвольной вершине v степени d:

$$i(G) = i(G \setminus \{v\}) + i(G \setminus (\{v\} \cup \partial v)).$$

Поскольку $\alpha(G \setminus v) \leqslant \alpha$, и

$$\alpha(G \setminus (v \cup \partial v)) \leqslant \min\{\alpha - 1, n - d - 1\},$$

то, пользуясь утверждением 17, с учётом предположения индукции имеем

$$\begin{aligned} i(G) &\leqslant i(n-1,\alpha) + i(n-d-1, \min\{\alpha-1, n-d-1\}) \leqslant \\ &\leqslant m(n-1,\alpha) + m(n-d-1, \min\{\alpha-1, n-d-1\}). \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $d > n - \alpha$. Тогда, пользуясь утверждением 18, получаем

$$\begin{aligned} i(G) &\leqslant m(n-1,\alpha) + m(n-d-1, n-d-1) = \\ &= m(n-1,\alpha) + 2^{n-d-1} \leqslant \\ &\leqslant m(n-1,\alpha) + 2^{\alpha-2} < \\ &< m(n,\alpha), \end{aligned}$$

что противоречит выбору G. Пусть теперь $d \leqslant n - \alpha$. Учитывая неравенство $d \geqslant \geqslant \lceil n/\alpha \rceil - 1$, с использованием утверждения 18, получаем

$$\begin{aligned} i(G) &\leqslant m(n-1,\alpha) + m(n-d-1,\alpha-1) \leqslant \\ &\leqslant m(n-1,\alpha) + m(n - \lceil n/\alpha \rceil, \alpha - 1) = \\ &= m(n,\alpha). \end{aligned} \tag{27}$$

Из (27) и предположения индукции следует, что для достижения равенства $i(G) = m(n,\alpha)$ необходимо, чтобы граф $G \setminus \{v\}$ был изоморфен $UK_{n-1,\alpha}$, граф $G \setminus (\{v\} \cup \partial v)$ был изоморфен $UK_{n-\lceil n/\alpha \rceil,\alpha-1}$, и максимальная степень вершин в G была равна $(\lceil n/\alpha \rceil - 1)$. Но это возможно только при $G \simeq UK_{n,\alpha}$. Теорема доказана. □

Следствие. *Среди всех лесов на n вершинах с числом независимости α наибольшим числом независимых множеств обладает только объединение паросочетания на $2(n-\alpha)$ вершинах и $2\alpha - n$ изолированных вершин.*

Замечание. *Для последовательности пар параметров (n_k, α_k) такой, что $n_k = k^2 + 2k$ и $\alpha_k = k^2$, отношение правых частей* (2) *и* (26) *равно*

$$\frac{(2+2/k)^{k^2}}{2^{k^2} \cdot (3/2)^{2k}} = \left(\frac{4}{9}(1+1/k)^k\right)^k > c^k,$$

где $c > 1$. При этом логарифмы правых частей (2) *и* (26) *асимптотически равны.*

3.2. Верхние оценки числа независимых множеств в лесах с заданным числом независимости

Обозначим через $T_{n,\alpha}$ дерево, полученное из звезды $K_{1,\alpha}$ подразбиением $(n-\alpha-1)$ рёбер. Нетрудно проверить, что $\alpha(T_{n,\alpha}) = \alpha$ и

$$i(T_{n,\alpha}) = 2^{n-\alpha+1} + 3^{n-\alpha+1}2^{2\alpha-n+1}.$$

Теорема 19. *Для любых n, α $(n \geqslant 2)$ среди всех деревьев на n вершинах с числом независимости α максимальное число независимых множеств имеют только деревья, изоморфные $T_{n,\alpha}$.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n \in \{2,3\}$ утверждение теоремы выполнено. Пусть $n \geqslant 4$ и утверждение теоремы верно для меньших значений n. Пусть G — дерево, такое, что $n(G) = n$, $\alpha(G) = \alpha$, и $i(G) \geqslant i(G')$ для любого дерева G' с параметрами $n(G') = n$, $\alpha(G') = \alpha$. Пусть диаметр графа G равен d. Пусть v, v' — висячие вершины в G, находящиеся друг от друга на расстоянии d, и пусть w — единственный сосед v в G.

1. Пусть w имеет степень 2. В этом случае граф $G \setminus \{v,w\}$ является деревом. Пользуясь предположением индукции с учётом $i(G \setminus \{v,w\}) \leqslant \alpha - 1$, а также монотонностью величины $i(T_{n,\alpha})$ по α при фиксированном n, получаем
$$\begin{aligned} i(G) &= i(G \setminus \{v\}) + i(G \setminus \{v,w\}) \leqslant \\ &\leqslant (2^{n-\alpha-2} + 3^{n-\alpha-2} \cdot 2^{2\alpha-n+2}) + (2^{n-\alpha-2} + 3^{n-\alpha-2} \cdot 2^{2\alpha-n+1}) = \\ &= 2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n+1}. \end{aligned}$$
Кроме того, из предположения индукции следует, что для выполнения равенства $i(G) = 2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n+1}$ необходимо, чтобы графы $G \setminus \{v\}$ и $G \setminus \{v,w\}$ были изоморфны $T_{n-1,\alpha}$ и $T_{n-2,\alpha-1}$ соответственно. Это возможно только при $G \simeq T_{n,\alpha}$.

2. Пусть $\deg w \geqslant 3$. Покажем, что в этом случае вершина w смежна помимо v еще хотя бы с одной висячей вершиной. Допустим противное, в таком случае найдутся вершины w_1, $w_2 \in \partial w \setminus \{v\}$, для которых $\deg w_1 \geqslant 2$, $\deg w_2 \geqslant 2$. Хотя бы одна из вершин w_1, w_2 не лежит на пути из v' в v, пусть это w_1. Пусть $v'' \in \partial w_1 \setminus \{w\}$. Расстояние между вершинами v' и v'' будет не меньше $(d+1)$, что противоречит определению d. Таким образом, среди соседей вершины w не менее двух висячих вершин. Отсюда вытекает, что вершина w не входит ни в одно максимальное по мощности независимое множество в G, а вершина v входит во все такие множества. Следовательно, $\alpha(G \setminus \{v\}) = \alpha - 1$. Имеем
$$\begin{aligned} i(G) &= i(G \setminus \{v\}) + i(G \setminus \{v,w\}) \leqslant \\ &\leqslant (2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n}) + i(n-2,\alpha-1) = \\ &= (2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n}) + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n} = \\ &= 2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n+1}. \end{aligned}$$

Из предположения индукции и следствия теоремы 18 вытекает, что для выполнения равенства $i(G) = 2^{n-\alpha-1} + 3^{n-\alpha-1} \cdot 2^{2\alpha-n+1}$ необходимо, чтобы граф $G \setminus \{v\}$ был изоморфен $T_{n-1,\alpha-1}$, а граф $G \setminus \{v, w\}$ был объединением паросочетания и изолированных вершин. Это возможно только при $G \simeq T_{n,\alpha}$.

$\square$

Обозначим через $F_{n,\alpha}$ объединение паросочетания на $2(n-\alpha-1)$ вершинах и звезды $K_{1,2\alpha-n+1}$.

***Теорема* 20.** *Среди всех лесов на n вершинах без изолированных вершин с числом независимости α максимум числа независимых множеств достигается только на лесах, изоморфных $F_{n,\alpha}$.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по n. При $n \in \{2, 3\}$ утверждение теоремы выполнено. Теорема, очевидно, также верна при $\alpha = n-1$. Далее считаем $\alpha < n-1$. Пусть F — лес без изолированных вершин такой, что $n(F) = n$, $\alpha(F) = \alpha$ и $i(F) \geqslant i(F')$ для любого леса F' без изолированных вершин с тем же числом вершин и числом независимости. Из теоремы 19 и неравенства $i(T_{n,\alpha}) < i(F_{n,\alpha})$ при $\alpha < n-1$ следует, что F не может быть деревом. Следовательно, найдутся порождённые подграфы F_1, F_2 такие, что $V(F_1) \cap V(F_2) = \varnothing$ и $F = F_1 \cup F_2$. Имеем

$$i(F) = i(F_1)i(F_2); \quad n(F) = n(F_1) + n(F_2); \quad \alpha(F) = \alpha(F_1) + \alpha(F_2),$$

откуда следует, что если хотя бы один из графов F_1, F_2 не изоморфен $F_{n',\alpha'}$ при некоторых n', α', то $i(F) < i(F_{n,\alpha})$. Если оба графа F_1, F_2 содержат звёзды на t_1 и t_2 вершинах соответственно ($t_1, t_2 \geqslant 3$), то заменив в F эти звёзды на одну звезду K_{1,t_1+t_2-3} и ребро, получим граф F' такой, что $n(F') = n, \alpha(F') = \alpha, i(F') > i(F)$ — противоречие. Если же один из графов F_1, F_2 является паросочетанием, то $F \simeq F_{n,\alpha}$, что и требовалось. $\square$

3.3. Соотношения между числом независимости и количеством независимых множеств в регулярных графах

Обозначим через $\mathcal{G}(n, k)$ класс всех k–регулярных графов на n вершинах. Гипотеза Н. Алона (см. Введение) утверждает, что максимальное число независимых множеств в классе $\mathcal{G}(n,k)$ при $2k \mid n$ достигается на $G_A(n,k)$ — объединении $\frac{n}{2k}$ непересекающихся полных двудольных графов. Граф Алона $G_A(n,k)$ имеет максимально возможное для регулярного графа число независимости $\frac{n}{2}$, при этом

$$i(G_A(n,k)) = 2^{\frac{n}{2}(1+\theta(k^{-1}))}.$$

Возникает вопрос: как сильно нужно ограничить число независимости графа G из класса $\mathcal{G}(n,k)$, чтобы добиться выполнения неравенства $i(G) \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$? Частичный ответ на этот вопрос даётся приводимой ниже теоремой 22.

***Лемма* 18.** *Для любого натурального k, $k \geqslant 3$, существует k–регулярный граф G_k, для которого выполнены неравенства*

$$\alpha(G_k) < \frac{|V(G_k)|}{2}\left(1-\Omega(k^{-1})\right), \tag{28}$$

$$\log_2(i(G_k)) > \frac{|V(G_k)|}{2}\left(1+\Omega(k^{-1})\right). \tag{29}$$

Доказательство. Будем рассматривать графы G_k следующего вида:

- Если k чётно, то

$$\begin{aligned}
V(G_k) \;=\;& \{u_i \mid i=\overline{1,\,k}\}\cup\\
&\cup\{v_i^j \mid i=\overline{1,\,k},\, j=\overline{1,\,k-2}\}\cup\\
&\cup\{w_l^j \mid l=\overline{1,\,k-2},\, j=\overline{1,\,k-2}\};\\
E(G_k) \;=\;& \{\,\{u_i,u_{i+1}\} \mid i=\overline{1,\,k-1}\,\}\cup\{\,\{u_k,u_1\}\,\}\cup\\
&\cup\{\,\{u_i,v_i^j\} \mid i=\overline{1,\,k},\, j=\overline{1,\,k-2}\,\}\cup\\
&\cup\{\,\{v_i^j,w_l^j\} \mid i=\overline{1,\,k},\, l=\overline{1,\,k-2},\, j=\overline{1,\,k-2}\,\}\cup\\
&\cup\{\,\{v_i^j,v_i^{j+1}\} \mid i=\overline{1,\,k},\, j=1,\,3,\,\ldots,\,k-3\}.
\end{aligned}$$

- Если k нечётно, то

$$
\begin{aligned}
V(G_k) \;=\; & \{u_i \mid i = \overline{1,\,k}\,\} \cup \\
& \cup \{v_i^j \mid i = \overline{1,\,k},\; j = \overline{1,\,k-2}\,\} \cup \\
& \cup \{w_l^j \mid l = \overline{1,\,k-2},\; j = \overline{1,\,k-3}\,\} \cup \\
& \cup \{w_l^{k-2} \mid l = \overline{1,\,k-1}\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(G_k) \;=\; & \{\,\{u_i, u_{i+1}\} \mid i = \overline{1,\,k-1}\,\} \cup \{\,\{u_k, u_1\}\,\} \cup \\
& \cup \{\,\{u_i, v_i^j\} \mid i = \overline{1,\,k},\; j = \overline{1,\,k-2}\,\} \cup \\
& \cup \{\,\{v_i^j, w_l^j\} \mid i = \overline{1,\,k},\; l = \overline{1,\,k-2},\; j = \overline{1,\,k-3}\,\} \cup \\
& \cup \{\,\{v_i^{k-2}, w_l^{k-2}\} \mid i = \overline{1,\,k},\; l = \overline{1,\,k-1}\,\} \cup \\
& \cup \{\,\{v_i^j, v_i^{j+1}\} \mid i = \overline{1,\,k},\; j = 1, 3, \ldots, k-4\}.
\end{aligned}
$$

При любом $k \geqslant 3$ граф G_k является k–регулярным. Примеры графов G_3 и G_4 изображены на рис. 17a и 17b соответственно.

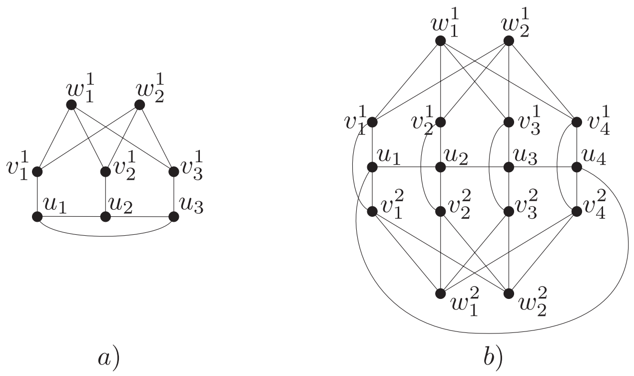

Рис. 17. Графы G_3 и G_4

На рис. 18 показано, как граф G_k получается в виде объединения более простых графов (случай нечётного k сверху, чётного — снизу):

Далее мы будем рассматривать только случай чётного k; рассуждения в случае нечётного k аналогичны.

В этом случае G_k — граф на $p = 2k^2 - 5k + 4$ вершинах. Покажем, что выполнено неравенство $\alpha(G_k) \leqslant \frac{p}{2}(1 - c'k^{-1})$. Пусть A — произвольное независимое множество в графе G_k. Возможны два случая:

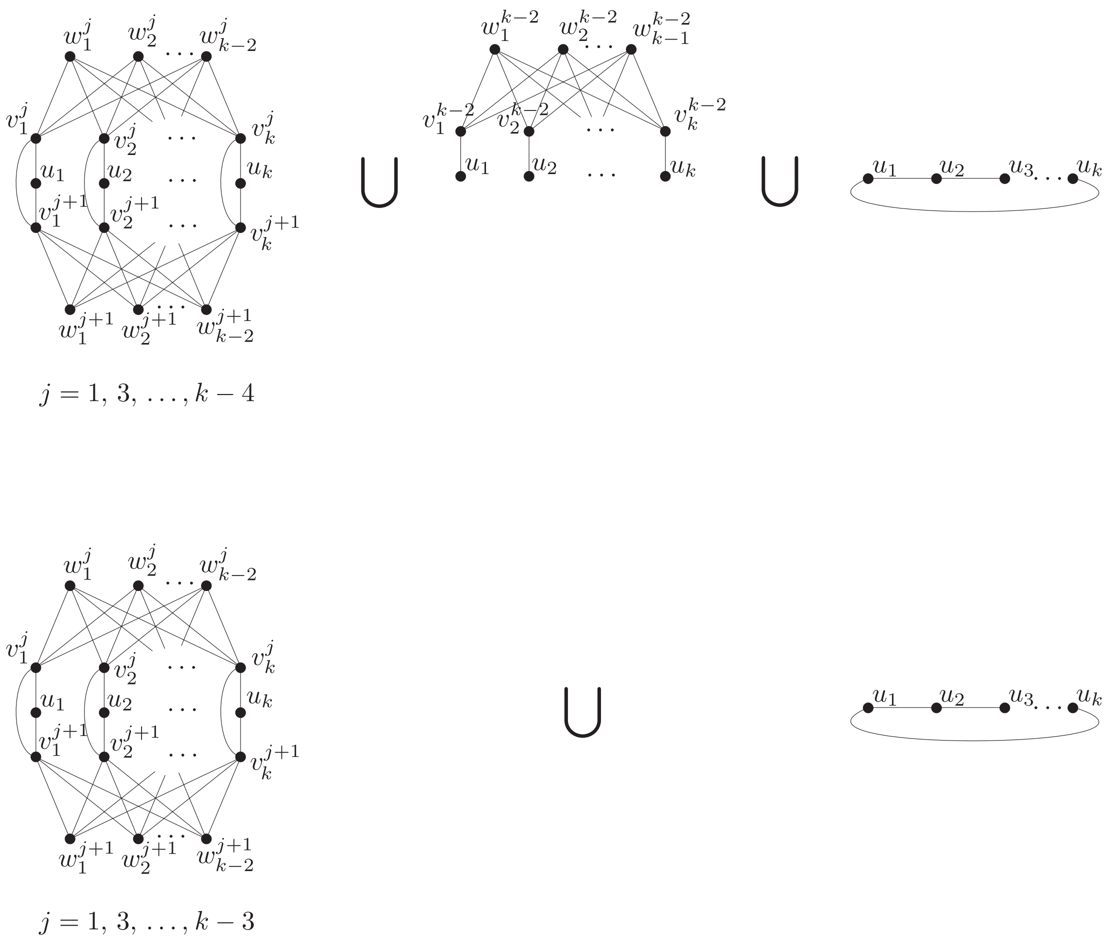

Рис. 18. Структура графа G_k

i) Какая-либо из вершин $u_1, \ldots, u_k$ входит во множество A. Пусть это вершина u_1. Тогда ни одна из вершин $v_1^1, \ldots, v_1^{k-2}$ не принадлежит множеству A. Кроме того, всего из множества $\{u_1, \ldots, u_k\}$ в A может входить не более $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ вершин. Для каждого $j \in \{1, 3, \ldots, k-3\}$ из множества

$$\{v_i^j \mid i = \overline{1,\, k}\} \cup \{v_i^{j+1} \mid i = \overline{1,\, k}\} \cup \{w_l^j \mid l = \overline{1,\, k-2}\} \cup \{w_l^{j+1} \mid l = \overline{1,\, k-2}\}$$

в A может входить не более $(k-1) + (k-2)$ вершин. Поэтому

$$|A| \leqslant \frac{k}{2} + \frac{k-2}{2}(2k-4) = k^2 - 3k + 3 = \frac{p}{2}(1 - \Omega(k^{-1})).$$

ii) Ни одна из вершин $u_1, \ldots, u_k$ не входит в A. В данном случае

$$|A| \leqslant \frac{k-2}{2}(2k-2) = k^2 - 3k + 2.$$

Это значение достигается при

$$A = \{v_i^j \mid i = \overline{1,\, k},\, j \equiv 1 \pmod 2\} \cup \{w_l^j \mid l = \overline{1,\, k-2},\, j \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Как и в предыдущем случае, $|A| = \frac{p}{2}(1 - \Omega(k^{-1}))$, а значит неравенство (28) выполнено.

Оценим теперь снизу число независимых множеств в графе G_k. Заметим, что $i(G) > (i(G'_k))^{(k-2)/2}$, где G'_k — подграф графа G, порождённый множеством вершин

$$\{v_i^j \mid i = \overline{1,k},\ j = 1,2\} \cup \{w_l^j \mid l = \overline{1,k-2},\ j = 1,2\}.$$

Граф G'_k изображен на рис. 19.

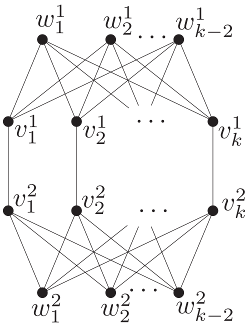

Рис. 19. Граф G'_k

Число $i(G'_k)$ можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} i(G'_k) &= (2^{k-2} - 1)(2^k + 2^{k-2} - 1) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (2^{k-j} + 2^{k-2} - 1) = \\ &= \frac{9}{16} \cdot 2^{2k} + 3^k - \frac{5}{2} \cdot 2^k + 1 > \frac{9}{16} \cdot 2^{2k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \log_2(i(G)) &> (2k + \log_2(9/16))(k-2)/2 = \\ &= k^2 + k \log_2(3/16) - \log_2(9/16) = \frac{p}{2}(1 + \Omega(k^{-1})). \end{aligned}$$

□

Нам понадобится следующая теорема, доказанная в работе [18] с использованием теоремы 6:

***Теорема* 21** (А. А. Сапоженко [18])**.** *Пусть граф G на n вершинах является регулярным степени k, и пусть $\alpha(G) = \mu$. Тогда для любого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, выполнено неравенство*

$$i(G) \leqslant \left(\frac{nk}{\mu(2k - l)} + 1 \right)^{\mu} \cdot (el)^{n/l},$$

где e — основание натурального логарифма.

Теорема 22. *Для сколь угодно больших K и N существует k–регулярный n–вершинный граф G, такой, что $k > K$, $n > N$, и*

$$\begin{aligned} \alpha(G) &< \frac{n}{2}\left(1 - \Omega(k^{-1})\right), \\ \log_2(i(G)) &> \frac{n}{2}\left(1 + \Omega(k^{-1})\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для любой константы $\theta \in (0,\, 1/2)$ для любого k–регулярного n–вершинного графа G, такого, что $\alpha(G) < \frac{n}{2}(1 - \Omega(k^{-\theta}))$, выполнено неравенство

$$\log_2(i(G)) < \frac{n}{2}(1 - \Omega(k^{-\theta})).$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Зафиксируем произвольные натуральные числа n и k, такие, что $k \mid n$. Рассмотрим n/k графов $G_{k,j}$, $j = \overline{1,\, n/k}$, каждый из которых изоморфен графу G_k, построение которого описано в лемме 18. Рассмотрим граф $G = \bigcup_{j=1}^{n/k} G_{k,j}$. Очевидно, $G \in \mathcal{G}(n,k)$. Из неравенств (28) и (29), а также из равенства $i(G) = \prod_{j=1}^{n/k} i(G_{k,j})$ следует

$$\begin{aligned} \alpha(G) &< \frac{n}{2}\left(1 - \Omega(k^{-1})\right), \\ \log_2(i(G)) &> \frac{n}{2}\left(1 + \Omega(k^{-1})\right), \end{aligned}$$

Теперь докажем вторую часть утверждения теоремы. Из теоремы 21, положив $l = \sqrt{k}$, при достаточно больших n и k для произвольного графа $G \in \mathcal{G}(n,k)$, такого, что $\alpha(G) < \frac{n}{2}(1 - \varepsilon k^{-\theta})$, получаем

$$\begin{aligned}
i(G) &\leqslant \left(\frac{nk}{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})(2k-\sqrt{k})} + 1\right)^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot (e\sqrt{k})^{nk^{-1/2}} = \\
&= 2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot \left(\frac{k}{(1-\varepsilon k^{-\theta})(2k-\sqrt{k})} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot (e\sqrt{k})^{nk^{-1/2}} = \\
&= 2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot \left(1 + \frac{2\varepsilon k^{1-\theta} + \sqrt{k} - \varepsilon k^{1/2-\theta}}{2(1-\varepsilon k^{-\theta})(2k-\sqrt{k})}\right)^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot (e\sqrt{k})^{nk^{-1/2}} < \\
&< 2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\varepsilon k^{1-\theta} + \sqrt{k} - \varepsilon k^{1/2-\theta}}{4k - 2\sqrt{k}}\right) \cdot (e\sqrt{k})^{nk^{-1/2}} = \\
&= 2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon k^{-\theta})} \cdot \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} k^{-\theta} + O(k^{-1/2}\ln k)\right)\right) = \\
&= 2^{\frac{n}{2}\left(1 - \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2\ln 2}\right)k^{-\theta} + O(k^{-1/2}\ln k)\right)} < 2^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}k^{-\theta} + O(k^{-1/2}\ln k)\right)}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ выполнено $\log_2(i(G)) < \frac{n}{2}(1 - \Omega(k^{-\theta}))$. □

3.4. Число независимых множеств в квазирегулярных двудольных графах

Энтропией случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i, называется величина $H(X) = -\sum\limits_i p_i \log_2 p_i$. Функция действительного аргумента $x \in [0, 1]$, заданная равенством

$$H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x),$$

называется *функцией энтропии*.

***Лемма* 19** (Дж. Ширер [24]). *Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — векторная случайная величина. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^s$ — семейство подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть каждое число i, $1 \leqslant i \leqslant n$ встречается по крайней мере в k множествах $A \in \mathcal{A}$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ введём векторную с. в. $X_A = (X_j \mid j \in A)$. Тогда*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} H[X_A] \geqslant kH[X].$$

Ниже приводятся основные свойства энтропии (см., например, [22, §14.6]).

***Утверждение* 19.** *Для любых с. в.* X_i

H1) $H[(X_1, X_2)] = H[X_1 \mid X_2] + H[X_2]$.

H2) $H[(X_1, X_2, \ldots, X_k)] \leqslant H[X_1] + H[X_2] + \ldots + H[X_k]$.

H3) Если с. в. X_1 *функционально зависит от* X_2*, то для любой с. в.* X_3 *выполнено неравенство* $H[X_3 \mid X_2] \leqslant H[X_3 \mid X_1]$.

H4) Если с. в. X_1 *функционально зависит от* X_2*, то* $H[(X_1, X_2)] = H[X_2]$.

H5) Если с. в. X *принимает* k *значений, то* $H[X] \leqslant \log_2 k$.

Следующая теорема обобщает теорему 5 на квазирегулярные двудольные графы.

***Теорема* 23.** *Пусть* G *— двудольный граф с долями* A *и* B*. Пусть степени вершин из* A *ограничены сверху числом* k_2*, а степени вершин из* B *ограничены снизу числом* k_1*. Тогда*

$$i(G) \leqslant (2^{k_1} + 2^{k_2} - 1)^{\frac{|A|}{k_1}}.$$

Доказательство. Всякое независимое множество $I \in \mathcal{I}(G)$ будем отождествлять с его векторным индикатором $(X_v \mid v \in A \cup B)$. Здесь X_v — индикатор события «вершина v содержится в выбранном независимом множестве». Применяя последовательно свойства H1, H2, лемму 19, и свойство H3, выводим

$$\begin{aligned}\log_2 i(G) = H[I] &= H[X_A \mid X_B] + H[X_B] \leqslant \\ &\leqslant \sum_{v\in A} H[X_v \mid X_B] + \frac{1}{k_1}\sum_{v\in A} H[X_{N(v)}] \leqslant \\ &\leqslant \sum_{v\in A}\left(H[X_v \mid X_{N(v)}] + \frac{1}{k_1}H[X_{N(v)}]\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Введём для каждой вершины v случайную величину Y_v — индикатор события «$X_{N(v)} = \widetilde{0}$». Пусть $p_v = Pr[Y_v = 1]$. По свойству H3, из определения условной энтропии, получаем

$$H[X_v \mid X_{N(v)}] \leqslant H[X_v \mid Y_v] \leqslant p_v. \tag{31}$$

По свойствам H4, H1, определению условной энтропии и свойству H5,

$$\begin{aligned} H[X_{N(v)}] &= H[(X_{N(v)}, Y_v)] = H[Y_v] + H[X_{N(v)} \mid Y_v] \leqslant \\ &\leqslant H(p_v) + (1-p_v)\log_2(2^{k_2}-1). \end{aligned} \tag{32}$$

Подставляя (32) и (31) в (30), приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} \log_2 i(G) &\leqslant \sum_{v\in A}\Big(p_v + \frac{1}{k_1}(H(p_v) + (1-p_v)\log_2(2^{k_2}-1))\Big) \leqslant \\ &\leqslant |A| \cdot \max_{p\in[0,1]}\Big(p + \frac{1}{k_1}(H(p) + (1-p)\log_2(2^{k_2}-1))\Big) = \\ &= |A| \cdot \max_{p\in[0,1]}\Big(1 - p + \frac{1}{k_1}(H(p) + p\log_2(2^{k_2}-1))\Big) = \\ &= |A| + \frac{|A|}{k_1} \cdot \max_{p\in[0,1]}\left(H(p) + p\log_2\left(\frac{2^{k_2}-1}{2^{k_1}}\right)\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Функция $f(p) = H(p) + p\log_2\left(\frac{2^{k_2}-1}{2^{k_1}}\right)$ достигает максимума в точке

$$p_0 = \frac{2^{k_2}-1}{2^{k_1}+2^{k_2}-1},$$

и максимальное значение равно $\log_2\left(\frac{2^{k_1}+2^{k_2}-1}{2^{k_1}}\right)$. Отсюда и из (33) следует, что

$$\log_2 i(G) \leqslant |A| + \frac{|A|}{k_1}\log_2\left(\frac{2^{k_1}+2^{k_2}-1}{2^{k_1}}\right) = \frac{|A|}{k_1}\log_2(2^{k_1}+2^{k_2}-1),$$

что непосредственно влечёт утверждение теоремы. $\square$

Из леммы 1 и теоремы 23 вытекает следующее утверждение, доказанное другим способом в [16].

***Теорема* 24** (А. А. Сапоженко [16])**.** *Пусть G — k–регулярный граф на n вершинах. Тогда*

$$i(G) \leqslant 2^{\frac{n}{2}(1+O(\sqrt{(\log_2 k)/k}))}.$$

Приложение А. Последовательность Штурма для полинома $(x-1)(x^4+1)^4 - x^{16}$

$$
\begin{aligned}
f_0 = {} & x^{17} - 2x^{16} + 4x^{13} - 4x^{12} + 6x^9 - 6x^8 + 4x^5 - 4x^4 + x - 1, \\
f_1 = {} & x^{16} - \tfrac{32}{17}x^{15} + \tfrac{52}{17}x^{12} - \tfrac{48}{17}x^{11} + \tfrac{54}{17}x^8 - \tfrac{48}{17}x^7 + \tfrac{20}{17}x^4 - \tfrac{16}{17}x^3 + \tfrac{1}{17}, \\
f_2 = {} & x^{15} - \tfrac{17}{4}x^{13} + \tfrac{59}{16}x^{12} + \tfrac{3}{2}x^{11} - \tfrac{51}{4}x^9 + \tfrac{405}{32}x^8 + \tfrac{3}{2}x^7 - \tfrac{51}{4}x^5 + \tfrac{211}{16}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{17}{4}x + \tfrac{287}{64}, \\
f_3 = {} & -x^{14} + \tfrac{11}{4}x^{13} - 2x^{12} - 3x^{10} + \tfrac{69}{8}x^9 - 6x^8 - 3x^6 + \tfrac{35}{4}x^5 - 6x^4 - x^2 + \tfrac{47}{16}x - 2, \\
f_4 = {} & -x^{13} + \tfrac{29}{21}x^{12} + \tfrac{8}{7}x^{11} - \tfrac{2}{7}x^{10} - \tfrac{53}{14}x^9 + \tfrac{41}{14}x^8 + \tfrac{8}{7}x^7 - \tfrac{8}{21}x^6 - \tfrac{85}{21}x^5 + \tfrac{53}{21}x^4 + \tfrac{8}{21}x^3 - \\
& - \tfrac{1}{7}x^2 - \tfrac{39}{28}x + \tfrac{65}{84}, \\
f_5 = {} & x^{12} - \tfrac{3264}{2209}x^{11} - \tfrac{696}{2209}x^{10} - \tfrac{906}{2209}x^9 + \tfrac{11055}{4418}x^8 - \tfrac{3432}{2209}x^7 - \tfrac{928}{2209}x^6 - \tfrac{1208}{2209}x^5 + \tfrac{5161}{2209}x^4 - \\
& - \tfrac{1172}{2209}x^3 - \tfrac{348}{2209}x^2 - \tfrac{453}{2209}x + \tfrac{6637}{8836}, \\
f_6 = {} & -x^{11} + \tfrac{879}{829}x^{10} + \tfrac{6405}{3316}x^9 - \tfrac{93919}{39792}x^8 - \tfrac{693}{829}x^7 + \tfrac{1172}{829}x^6 + \tfrac{2135}{829}x^5 - \tfrac{42969}{13264}x^4 - \tfrac{625}{2487}x^3 + \\
& + \tfrac{879}{1658}x^2 + \tfrac{6405}{6632}x - \tfrac{32779}{26528}, \\
f_7 = {} & -x^{10} + \tfrac{53407}{17532}x^9 - \tfrac{4399}{1948}x^8 - \tfrac{260}{1461}x^7 - \tfrac{4}{3}x^6 + \tfrac{24197}{5844}x^5 - \tfrac{51323}{17532}x^4 - \tfrac{130}{1461}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \\
& + \tfrac{18355}{11688}x - \tfrac{12611}{11688}, \\
f_8 = {} & x^9 - \tfrac{853668}{689617}x^8 - \tfrac{315456}{689617}x^7 + \tfrac{29220}{689617}x^6 + \tfrac{1008501}{689617}x^5 - \tfrac{987404}{689617}x^4 - \tfrac{157728}{689617}x^3 + \tfrac{17532}{689617}x^2 + \\
& + \tfrac{796431}{1379234}x - \tfrac{336342}{689617}, \\
f_9 = {} & x^8 - \tfrac{900527616}{621193153}x^7 - \tfrac{68293440}{621193153}x^6 - \tfrac{11922180}{88741879}x^5 + \tfrac{105438627}{88741879}x^4 - \tfrac{455780744}{621193153}x^3 - \tfrac{40976064}{621193153}x^2 - \\
& - \tfrac{7153308}{88741879}x + \tfrac{73281225}{177483758}, \\
f_{10} = {} & x^7 - \tfrac{145719580}{29489963}x^6 - \tfrac{882209825}{117959852}x^5 + \tfrac{11071460827}{471839408}x^4 + \tfrac{10728971}{58979926}x^3 - \tfrac{87431748}{29489963}x^2 - \\
& - \tfrac{529325895}{117959852}x + \tfrac{13409991623}{943678816}, \\
f_{11} = {} & -x^6 - \tfrac{56333223}{551533100}x^5 + \tfrac{3940569}{1198985}x^4 - \tfrac{357480}{5515331}x^3 - \tfrac{3}{5}x^2 - \tfrac{2468075}{44122648}x + \tfrac{551084501}{275766550}, \\
f_{12} = {} & x^5 - \tfrac{70388030335}{37930036817}x^4 + \tfrac{940679000}{37930036817}x^3 - \tfrac{55153310}{37930036817}x^2 + \tfrac{45527310825}{75860073634}x - \tfrac{85234936291}{75860073634}, \\
f_{13} = {} & x^4 + \tfrac{739310388352}{13435006309713}x^3 + \tfrac{112620848536}{13435006309713}x^2 + \tfrac{20883732410}{1492778478857}x + \tfrac{1868446901133}{2985556957714}, \\
f_{14} = {} & -x^3 - \tfrac{42628900319}{9038969207957}x^2 - \tfrac{312644395521}{36155876831828}x - \tfrac{85929196356567}{144623507327312}, \\
f_{15} = {} & x^2 + \tfrac{56493602552535}{48822373252}x - \tfrac{57985421050465}{48822373252}, \\
f_{16} = {} & x - \tfrac{310948912}{303217841}, \\
f_{17} = {} & 1.
\end{aligned}
$$

Литература

1. Алексеев В. Е. Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа // Дискретная математика. 2007. Т. 19. Вып. 3. С. 84–88.

2. Воронин В. П., Демакова Е. В. О числе независимых множеств для некоторых семейств графов // Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем», Красновидово, 19—25 июня 2000 г., М.: МАКС-Пресс, 2000. С. 145–149.

3. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости // Дискретная математика. 2007. Т. 19. Вып. 2. С. 63–66.

4. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в деревьях малого диаметра // Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября — 1 ноября 2008) / Под ред. О. М. Касим-Заде. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2008. С. 32–36.

5. Дайняк А. Б. О некоторых вопросах, связанных с гипотезой Алона о числе независимых множеств // Материалы VI молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16—21 апреля 2007). Часть I. / Под ред. А. В. Чашкина. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2007. С. 26–30.

6. Дайняк А. Б. Уточнение оценки В. Е. Алексеева числа независимых множеств в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV международной конференции (Казань, 2—7 июня 2008) / Под ред. Ю. И. Журавлёва — Казань: Отечество, 2008. С. 25.

7. Дайняк А. Б. Оценки числа независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости // Вестник Московского университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. №2. С. 45–48.

8. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 2. С. 61–73.

9. Дайняк А. Б. О нижних оценках числа независимых множеств в некоторых классах графов // Сборник тезисов XVI Международной научной конференции сту-

дентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2009». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». 13—18 апреля, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: МАКСПресс, 2009. С. 24.

10. Дайняк А. Б. О числе максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Современные проблемы математики, механики, и их приложений. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию акад. В. А. Садовничего. М.: Университетская книга, 2009. С. 357.
11. Дайняк А. Б. Оценки числа независимых множеств в графах из некоторых классов // Восьмая международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6—9 апреля, 2009 г.): Труды / Отв. ред. В. Б. Алексеев, В. А. Захаров. — М.: МАКС Пресс, 2009. С. 79–81.
12. Dainiak A. B. Sharp bounds for the number of maximal independent sets in trees of fixed diameter // arXiv:0812.4948v1. 12 pp.
13. Дистель Р. Теория графов (пер. с англ.). Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002. 336 с.
14. Коршунов А. Д., Сапоженко А. А. О числе двоичных кодов с расстоянием 2 // Проблемы кибернетики. Вып 40. М.: Наука, 1983. С. 111–130.
15. Прасолов В. В. Многочлены. 3–е изд. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
16. Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в расширителях // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 1. С. 56–62.
17. Сапоженко А. А. Доказательство гипотезы Камерона-Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.:Физматлит. 2003. С. 5–14.
18. Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в графах // Вестник Московского университета, сер. 1, Математика, Механика. 2007. № 3. С. 33–37.
19. Сапоженко А. А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 9. — М.: Наука, 2000. С. 161–220.
20. Сапоженко А. А. О методе контейнеров // Дискретная математика и её приложения. Сборник лекций молодёжных научных школ. Выпуск IV. / Под ред. А. В. Чашкина. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2007. С. 11–25.
21. Alon N. Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups // Israel J. Math. 1991. 2(73). P. 247–256.

22. Alon N., Spenser J. H. The Probabilistic Method. Third edition. Wiley-Interscience, 2008. 352 pp. (Русский перевод: Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. Пер. 2-го англ. изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 320 с.)

23. Calkin N., Wilf H. S. The number of independent sets in a grid graph // SIAM J. Discr. Math. 1998. 11. P. 54–60.

24. Chung F., Frank P., Graham R., Shearer J. Some intersection theorems for ordered sets and graphs // J. Comb. Th. Ser. A. 1986. 43. P. 23–37.

25. Croitoru C. On stables in graphs // Proc. Third Coll. Operations Research, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania. 1979. P. 55–60.

26. Eppstein D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring // J. Graph Algorithms and Applications (special issue for WADS'01) 2003. 7(2). P. 131–140.

27. Frendrup A., Pedersen A. S., Sapozhenko A. A., Vestergaard P. D. Merrifield-Simmons index and minimum number of independent sets in short trees // Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Research Report Series. ISSN 1399-2503. R-2009-03, January 2009. 13pp.

28. Griggs J. R., Grinstead C. M., Guichard D. R. The number of maximal independent sets in a connected graph // Discrete Math. 1988. 68. P. 211–220.

29. Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons //Bull. Chem. Soc. Jpn. 1971. 44(9). P. 2332–2339.

30. Hujter M., Tuza Ž. The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM J. Discr. Math. 1993. 6(2). P. 284–288.

31. Johnson D. S., Yannakakis M., Papadimitriou C. H. On generating all maximal independent sets // Information Processing Letters. 1988. 27(3). P. 119–123.

32. Kahn J., Lawrenz A. Generalized rank functions and an entropy argument // J. Comb. Th. Ser. A. 1999. 87. P. 398–403.

33. Lin S., Lin Ch. Trees and forests with large and small independent indices // Chinese J. Math. 1995. 23(3). P. 199-–210.

34. Merrifield R. E., Simmons H. E. Topological methods in chemistry, New York, John Wiley & Sons, 1989.

35. Miller R. E., Muller D. E. The problem of maximum consistent subsets — IBM Research Report RC-240. 1960. J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y.

36. Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965. 3. P. 23–28.

37. Nielsen J. M. On the number of maximal independent sets in a graph. Preprint. Research Series RS-02–15, BRICS. Aarhus, Denmark: University of Aarhus, Department of Computer Science, 2002. 10p.

38. Pedersen A. S., Vestergaard P. D. Bounds on the number of vertex independent sets in a graph // Taiwanese J. Math. 2006. 6(10). P. 1575–1587.

39. Pedersen A. S., Vestergaard P. D. An upper bound on the number of independent sets in a tree // Ars Combinatoria. 2007. 84. P. 85–96.

40. Prodinger H., Tichy R. F., Fibonacci numbers of graphs // Fibonacci Quart. 1982. 20(1). P. 16–21.

41. Sagan B. E. A note on independent sets in trees // SIAM J. Discr. Math. 1988. 1. P. 105–108.

42. Sagan B. E., Ying G. Ch., Meng K. K., Vatter V. Maximal independent sets in graphs with at most r cycles // J. Graph Th. 2006. 53. P. 270–282

43. Tsukigama S., Ide M., Ariochi H., Ozaki H. A new algorithm for generating all the maximal independent sets // SIAM J. Comput. 1977. 3(6). P. 505–517.

44. Wilf H. S. The number of maximal independent sets in a tree // SIAM J. Alg. Discr. Methods 1986. 7. P. 125–130.